

Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Cours 2 – Modèles en biologie

Christophe Ambroise

L3 GBI – Université d'Évry

Préparer un milieu de culture

Trois solutions mères, trois composants.

g/L	S ₁	S ₂	S ₃	Cible
Glucose	20	10	0	30
Azote	5	20	0	25
Phosphate	1	2	10	13

Quels volumes x_1, x_2, x_3 ?

Le problème

Mise en équations

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 & = 30 \\ 5x_1 + 20x_2 & = 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 & = 13 \end{cases}$$

Trois équations, trois inconnues.

Le même problème, partout

Doser un mélange. Équilibrer une réaction.

Ajuster un modèle. Estimer des flux métaboliques.

Le plus ancien problème

Résolution de systèmes linéaires : Chine, **200 av. J.-C.**

Linéaire ?

Oui

$$3x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 = 2(\sqrt{6} - x_2) + x_3$$

$$\pi x_1 - \sqrt{2} x_2 = 0$$

Chaque inconnue : **puissance 1**, jamais multipliée par une autre.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad x_j \text{ au degré } 1$$

Non

$$x_1 x_2 = 4$$

$$\sqrt{x_1} - 2x_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2 = 3$$

Équation linéaire

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Les a_i : les **coefficients**. Le nombre b : le **second membre**.

Les x_i : les **inconnues**.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \quad a_j, b \in \mathbb{R} \text{ connus}$$

Attention

$\sqrt{6}$ et π : des **coefficients**, pas des inconnues.

La linéarité concerne les x_i , pas les nombres qui les accompagnent.

Système linéaire

m équations, n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Double indice : a_{ij} — ligne i , colonne j .

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

Deux questions

Existence — au moins une solution ?

Unicité — au plus une solution ?

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \quad \text{card } \mathcal{S} \leq 1$$

Les réponses, avant tout calcul, par la géométrie.

Solution

Un n -uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifiant **toutes** les équations à la fois.

L'**ensemble des solutions** : toutes ces listes, et rien d'autre.

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \right\}$$

Résoudre

Décrire l'ensemble des solutions. Pas en trouver une.

9

10

Lecture géométrique

11

12

Une équation, deux inconnues

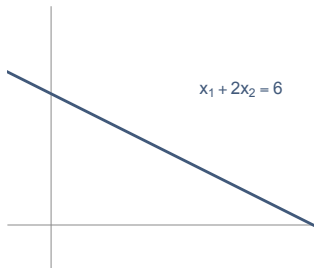


Figure 1

Une **droite** du plan. Chaque point : une solution.

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 6\}$$

Cas 1 – sécantes

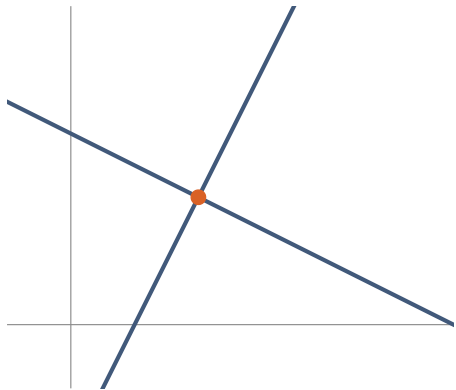


Figure 2

Un point. **Une solution unique.**

Deux équations

Deux droites.

Les solutions communes : les points d'**intersection**.

Trois configurations, pas une de plus.

$$\mathcal{S} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$$

13

Cas 2 – parallèles

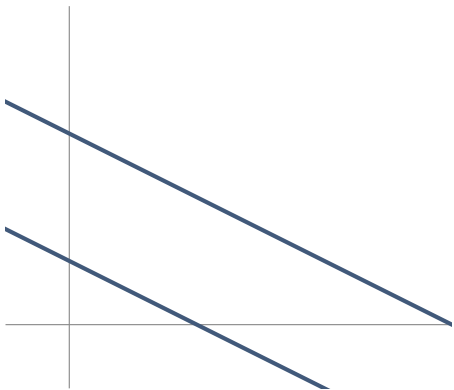


Figure 3

Aucun point commun. **Aucune solution.**

15

14

16

Cas 3 – confondues

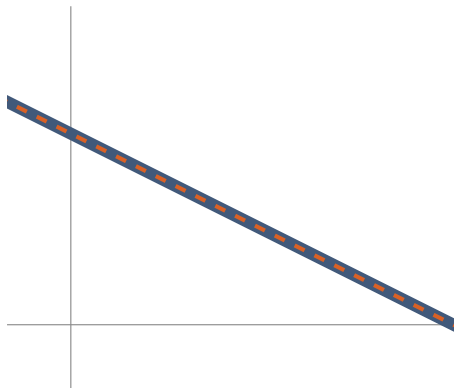


Figure 4

Toute la droite. **Une infinité de solutions.**

Pourquoi jamais deux

Deux solutions distinctes **u** et **v**.

Alors tous les points de la droite (**uv**) : encore des solutions.

Deux entraîne l'infini.

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \implies \forall t \in \mathbb{R}, (1 - t) \mathbf{u} + t \mathbf{v} \in \mathcal{S}$$

Le résultat

Trois cas, jamais plus

Un système linéaire admet **zéro**, **une**, ou **une infinité** de solutions.

Jamais exactement deux. Jamais exactement dix-sept.

$$\text{card } \mathcal{S} \in \{0, 1, +\infty\}$$

Vocabulaire

Compatible – au moins une solution.

Incompatible – aucune solution.

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \qquad \mathcal{S} = \emptyset$$

Trois inconnues

Une équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$: un **plan** de l'espace.

Configuration	Solutions
Trois plans sécants en un point	une
Trois plans se coupant selon une droite	une infinité
Deux plans parallèles	aucune
Trois plans confondus	une infinité

Au-delà

$n = 500\,000$: plus aucune image.

D'où l'algèbre

L'intuition géométrique s'arrête à 3. Le calcul, non.

Systemes équivalents

L'idée

Transformer le système en un système **plus simple**,

sans changer l'ensemble des solutions.

Définition

Deux systèmes **équivalents** : même ensemble de solutions.

Notation : $\sim$

$$S \sim S' \iff S = S'$$

La condition qui compte

$\lambda \neq 0$ dans la dilatation.

Multiplier une ligne par **0** : l'équation disparaît, des solutions apparaissent.

Trois opérations élémentaires

Échange – permuter deux lignes. $L_i \leftrightarrow L_j$

Dilatation – multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$. $L_i \leftarrow \lambda L_i$

Transvection – ajouter à une ligne un multiple d'une autre. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Pourquoi ça marche

Chaque opération est **réversible**.

Opération	Inverse
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

Aucune solution perdue, aucune inventée.

$$S \xrightarrow{O} S' \text{ avec } O \text{ inversible} \implies S = S'$$

Exemple — départ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Exemple — éliminer x_1

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases}$$

29

30

Exemple — normaliser

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases}$$

Exemple — éliminer x_2

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 30x_3 = -30 \end{cases}$$

31

32

Exemple — remonter

$x_3 = -1$, puis $x_2 = 4 + 4x_3 = 0$, puis $x_1 = 2x_2 - x_3 = 1$.

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$$

Vérification dans les trois équations d'origine : indispensable.

Matrices augmentées

Le poids de la notation

Les x_i recopiés à chaque ligne, à chaque étape.

Seuls les **coefficients** changent.

Ne garder que les nombres

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right]$$

Deux matrices

Matrice des coefficients – 3×3 , à gauche de la barre.

Matrice augmentée – 3×4 , barre comprise.

La barre : un rappel visuel, sans statut mathématique.

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad [A \mid \mathbf{b}] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Opérations sur les lignes

Les trois opérations élémentaires, transposées telles quelles.

Vocabulaire identique, notation identique, effet identique.

Les places vides

Un coefficient absent : un **zéro**.

$5x_1 - 5x_3 = 10$ donne la ligne $[5 \quad 0 \quad -5 \quad 10]$.

37

38

Formes échelonnées

39

40

Objectif

Une forme où les solutions **se lisent**.

Pivot

Le premier coefficient non nul d'une ligne : son **pivot**.

Colonne contenant un pivot : **colonne pivot**.

Matrice échelonnée

Trois conditions :

1. Lignes nulles en **bas**.
2. Dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul est **à droite** de celui de la ligne au-dessus.
3. En dessous d'un tel coefficient : que des zéros.

$j(i)$: colonne du pivot de la ligne i , pour $i \leq r$.

$$j(1) < j(2) < \cdots < j(r), \quad \text{lignes } r+1, \dots, m \text{ nulles}$$

Échelonnée

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Trois pivots. L'escalier descend vers la droite.

Pas échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ligne nulle au milieu.

Pas échelonnée non plus

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un **3** sous un pivot.

Échelonnée réduite

Deux conditions de plus :

4. Chaque pivot vaut **1**.
5. Un pivot est **seul non nul** dans sa colonne.

$$\forall i \leq r, \quad a_{i, j(i)} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \neq i, \quad a_{k, j(i)} = 0$$

Comparaison

Échelonnée

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Échelonnée réduite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un résultat important

Unicité

Une matrice est équivalente à **une seule** matrice échelonnée réduite.

La forme échelonnée, elle, dépend du chemin suivi.

Conséquence : la **position des pivots** ne dépend pas du chemin.

$$\forall A, \exists ! R \text{ échelonnée réduite} : A \sim R$$

Carl Friedrich Gauss

Méthode publiée en 1810, pour le calcul d'orbites.

Connue en Chine dix-huit siècles plus tôt.

Aujourd'hui : le cœur de tout logiciel de calcul numérique.

L'algorithme du pivot

Deux phases

Descente — vers la forme échelonnée. Élimination sous les pivots.

Remontée — vers la forme échelonnée réduite. Élimination au-dessus.

Descente, étape par étape

1. Colonne non nulle la plus à gauche.
2. Un coefficient non nul en tête : par échange si nécessaire. C'est le pivot.
3. Élimination de tout ce qui est en dessous, par transvections.
4. Ligne du pivot mise de côté. Reprise sur ce qui reste.

Exemple — l'état initial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right]$$

Premier pivot : le 1 en haut à gauche.

Remontée

Pivots parcourus **de droite à gauche**.

Chacun ramené à 1 par dilatation.

Élimination au-dessus, par transvections.

Exemple — descente (1)

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array} \right]$$

Colonne 1 terminée.

Exemple — descente (2)

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{array} \right]$$

Forme échelonnée. Trois pivots.

Exemple — remontée (2)

$$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3, \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Colonne 3 nettoyée.

Exemple — remontée (1)

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{30}L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Pivots à 1.

Exemple — remontée (3)

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Forme échelonnée réduite.

Exemple — lecture

$$\begin{cases} x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & 0 \\ & & x_3 = & -1 \end{cases}$$

Aucun calcul restant. La réponse est écrite.

Lire les solutions

Choix du pivot

Un pivot $\neq 0$ suffit en théorie.

En pratique numérique : le **plus grand en valeur absolue**.

Un petit pivot amplifie les erreurs d'arrondi.

Deux sortes d'inconnues

Variable liée — inconnue dont la colonne porte un pivot.

Variable libre — toutes les autres.

$$x_j \text{ liée} \iff j \in \{j(1), \dots, j(r)\}, \quad \text{libres : } n - r$$

Cas 1 – solution unique

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Trois pivots, trois inconnues. **Aucune variable libre.**

Cas 2 – aucune solution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right]$$

Dernière ligne : $0 = 5$.

Le signal

Un pivot dans la **colonne du second membre** : système incompatible.

$$\text{pivot en colonne } n + 1 \iff \mathcal{S} = \emptyset$$

Cas 3 – une infinité

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Deux pivots, trois inconnues. x_3 : **libre**.

Description paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 7x_3 \\ x_2 = 4 + 4x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

x_3 parcourt $\mathbb{R}$: une droite de solutions.

Sous forme vectorielle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 + 7t \\ 4 + 4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de départ, une direction.

Déjà une **combinaison linéaire**.

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{p} + t \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Récapitulatif

Pivot dans la dernière colonne	Variables libres	Solutions
oui	–	aucune
non	non	une seule
non	oui	une infinité

Le théorème

Existence et unicité

Système **compatible** $\iff$ aucun pivot dans la colonne du second membre.

Solution **unique** $\iff$ compatible et aucune variable libre.

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \text{aucun pivot en colonne } n + 1$$
$$\text{card } \mathcal{S} = 1 \iff \mathcal{S} \neq \emptyset \text{ et } r = n$$

Un système à paramètre

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = m \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : (m - 1)x_1 = 1 - m$$

$m \neq 1$: solution unique. $m = 1$: une infinité.

$$m \neq 1 \Rightarrow \text{card } \mathcal{S} = 1, \quad m = 1 \Rightarrow \text{card } \mathcal{S} = +\infty$$

Retour au milieu de culture

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 &= 30 \\ 5x_1 + 20x_2 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$$