

Algèbre linéaire — Livret de TD

Version étudiante

Christophe Ambroise

Table des matières

Présentation	3
I Fiches de TD	4
1 TD 1 — Vecteurs et systèmes linéaires	5
1.1 Objectifs	5
1.2 Pour s'entraîner	7
2 TD 2 — Calcul matriciel et matrice inverse	8
2.1 Objectifs	8
2.2 QCM 1 — Systèmes et calcul matriciel	8
2.3 Pour s'entraîner	11
3 TD 3 — Sous-espaces et indépendance linéaire	12
3.1 Objectifs	12
3.2 Pour s'entraîner	14
4 TD 4 — Bases, dimension et rang	15
4.1 Objectifs	15
4.2 QCM 2 — Bases, dimension et rang	15
4.3 Pour s'entraîner	16
5 TD 5 — Distances, orthogonalité et changement de base	17
5.1 Objectifs	17
5.2 Pour s'entraîner	18
6 TD 6 — Projection orthogonale et régression linéaire	19
6.1 QCM 3 — Produit scalaire, orthogonalité, projection	19
6.2 Pour s'entraîner	20
7 TD 7 — Déterminants et diagonalisation	21
7.1 QCM 4	21
7.2 Pour s'entraîner	22
8 TD 8 — Diagonalisation et covariance dans iris	23
8.1 Pour s'entraîner	24
9 TD 9 — ACP complète sur des données biologiques	25
9.1 Pour s'entraîner	26

Présentation

Ce livret accompagne les neuf séances de travaux dirigés du cours d'algèbre linéaire de L3 GBI.

Chaque fiche contient volontairement davantage d'exercices qu'une séance ne permet généralement d'en traiter. Les exercices restants sont destinés à l'entraînement personnel.

Cette version contient uniquement les énoncés.

Première partie

Fiches de TD

1 TD 1 — Vecteurs et systèmes linéaires

1.1 Objectifs

Cette fiche mobilise les notions des cours C1 et C2 : calcul dans $\mathbb{R}^n$, combinaisons linéaires, mise en équations et résolution de systèmes par le pivot de Gauss.

Les exercices 1 à 6 constituent le cœur de la séance. Les exercices 7 et 8 prolongent le travail et permettent de s'entraîner.

Exercice 1.1. Calcul vectoriel. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $\mathbf{u} = (2, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 3)$ et $\mathbf{w} = (4, 1)$.

1. Calculer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ et $-3\mathbf{v}$.
2. Déterminer deux réels α et β tels que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$.
3. Décrire géométriquement l'effet de la multiplication d'un vecteur non nul par -2 .

Exercice 1.2. Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^3$. Soient

$$\mathbf{a} = (1, 0, 2), \quad \mathbf{b} = (0, 1, -1).$$

1. Écrire les vecteurs de la forme $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ en fonction de α et β .
2. Les vecteurs $\mathbf{c} = (2, 1, 3)$ et $\mathbf{d} = (1, 2, 0)$ sont-ils des combinaisons linéaires de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$? Donner les coefficients lorsqu'ils existent.
3. Caractériser par une équation les vecteurs (x, y, z) obtenus comme combinaisons linéaires de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.
4. Le vecteur $\mathbf{e} = (1, 1, 2)$ appartient-il à cet ensemble?

Exercice 1.3. Mélange de profils d'expression. Deux types cellulaires possèdent les profils d'expression moyens suivants pour trois gènes :

$$\mathbf{p}_A = (8, 2, 1), \quad \mathbf{p}_B = (2, 6, 5).$$

Le profil d'un échantillon mélangé est modélisé par $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_A + \beta\mathbf{p}_B$, avec $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha, \beta \geq 0$.

1. Pour $\mathbf{x} = (3, 5, 5, 4)$, déterminer α et β , puis vérifier le résultat sur les trois coordonnées.
2. Effectuer le même travail pour $\mathbf{y} = (5, 4, 3)$.
3. Interpréter les coefficients obtenus.

Exercice 1.4. Dénombrement de types cellulaires. Un échantillon contient trois types de cellules, en quantités inconnues x , y et z . Les mesures disponibles donnent les informations suivantes :

- l'échantillon contient 100 cellules au total ;
- le premier marqueur fournit l'équation $2x + y = 100$;
- le second marqueur fournit l'équation $y + 3z = 130$.

1. Écrire le système linéaire vérifié par x , y et z .
2. Écrire sa matrice augmentée.
3. Résoudre le système par élimination de Gauss.
4. Interpréter la solution dans le contexte de l'exercice.

Exercice 1.5. Pivot de Gauss. Résoudre le système suivant par élimination de Gauss. Les opérations élémentaires effectuées sur les lignes doivent apparaître.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ 2x - y + 2z = 7, \\ -3x - 4y + z = 3. \end{cases}$$

Vérifier ensuite la solution dans le système initial.

Exercice 1.6. Combien de solutions ? Pour chacun des systèmes suivants :

1. donner une forme échelonnée de la matrice augmentée ;
2. déterminer s'il possède une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions ;
3. donner l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2, \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 2y - 2z = 2, \\ x - y + z = 3, \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

1.2 Pour s'entraîner

Exercice 1.7. Discussion suivant un paramètre. Pour $m \in \mathbb{R}$, étudier le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1, \\ x + my + z = 1, \\ x + y + mz = 1. \end{cases}$$

Donner l'ensemble des solutions dans chacun des cas rencontrés.

Exercice 1.8. Système à quatre inconnues. Résoudre par élimination de Gauss le système suivant, en indiquant les principales opérations sur les lignes :

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3t = -1, \\ -2x + y - 2z + 3t = 5, \\ -x + 3y - 6z - 3t = 14, \\ 2x - 3y + 5z - 5t = -6. \end{cases}$$

Vérifier la solution obtenue dans les quatre équations initiales.

2 TD 2 — Calcul matriciel et matrice inverse

2.1 Objectifs

Cette fiche mobilise les notions des cours C2 et C3 : écriture matricielle d'un système, dimensions, produits matriciels, transposée, inversibilité et calcul d'une matrice inverse par le pivot de Gauss.

Le QCM et les exercices 1 à 5 constituent le cœur de la séance. Les exercices 6 et 7 prolongent le travail et permettent de s'entraîner.

2.2 QCM 1 — Systèmes et calcul matriciel

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Quelle affirmation est correcte ?
 - a. AB est une matrice 2×2 .
 - b. BA est une matrice 2×2 .
 - c. AB est une matrice 3×4 et BA n'est pas défini.
 - d. Les deux produits sont définis.
2. Si $AB = 0$, alors :
 - a. $A = 0$ ou $B = 0$ nécessairement.
 - b. aucune conclusion de ce type n'est possible en général.
 - c. $BA = 0$ nécessairement.
 - d. A et B sont inversibles.
3. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible exactement lorsque :
 - a. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
 - b. A est carrée.
 - c. $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A .
 - d. toutes les colonnes de A sont non nulles.
4. Un système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:
 - a. n'a jamais de solution.

- b. possède toujours au moins la solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - c. possède toujours une infinité de solutions.
 - d. possède toujours une solution non nulle.
5. Pour des matrices de dimensions compatibles :
- a. $(AB)^\top = A^\top B^\top$.
 - b. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
 - c. $(AB)^\top = AB$.
 - d. $(AB)^\top = BA$.
6. Une matrice carrée A d'ordre n est inversible exactement lorsque :
- a. sa forme échelonnée réduite est I_n .
 - b. tous ses coefficients sont non nuls.
 - c. elle est symétrique.
 - d. elle possède une ligne de zéros.

Exercice 2.1. Dimensions et produits. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les dimensions de A , B et $\mathbf{u}$.
2. Parmi $A + B$, $A\mathbf{u}$, $B\mathbf{u}$, AB et BA , indiquer les opérations définies et la dimension de leur résultat.
3. Calculer $A\mathbf{u}$, AB et BA .
4. Comparer AB et BA . Pourquoi leur égalité était-elle déjà impossible au vu de leurs dimensions ?

Exercice 2.2. Ordre des produits. Soient

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer CD et DC . Que montre ce calcul ?
2. Calculer successivement $D\mathbf{x}$ puis $C(D\mathbf{x})$.
3. Calculer $(CD)\mathbf{x}$ et vérifier l'associativité du produit sur cet exemple.
4. Calculer $(DC)\mathbf{x}$. Pourquoi ce résultat décrit-il une autre transformation ?

Exercice 2.3. Profils d'expression sous forme matricielle. Les profils moyens de deux types cellulaires pour trois gènes sont placés dans les colonnes de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\mathbf{c} = (\alpha, \beta)^\top$ contient les proportions des deux types cellulaires.

1. Expliquer pourquoi $P\mathbf{c}$ est la combinaison linéaire des deux profils, pondérée par α et β .
2. Écrire sous forme d'un système l'équation $P\mathbf{c} = (3, 5, 5, 4)^\top$, puis la résoudre avec la contrainte $\alpha + \beta = 1$.
3. Le vecteur $(5, 4, 4)^\top$ peut-il s'écrire $P\mathbf{c}$ avec $\alpha + \beta = 1$? Justifier à l'aide du système associé.

Exercice 2.4. Transposée et matrice symétrique. Soit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les dimensions de $E^\top$ et de $E^\top E$.
2. Calculer $E^\top E$ et vérifier directement que cette matrice est symétrique.
3. Soit M une matrice réelle quelconque. En utilisant la règle sur la transposée d'un produit, montrer que $M^\top M$ est toujours symétrique.

Exercice 2.5. Inversibilité en dimension 2. Soient

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que F est inversible, calculer F^{-1} , puis vérifier le résultat par un produit matriciel.
2. Résoudre $F\mathbf{x} = (7, 19)^\top$ à l'aide de F^{-1} .
3. Montrer que G n'est pas inversible.
4. Trouver un vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$, puis relier ce résultat à la non-inversibilité de G .

2.3 Pour s'entraîner

Exercice 2.6. Inverse par Gauss–Jordan. Calculer l'inverse de

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en appliquant le pivot de Gauss à la matrice augmentée $[H \mid I_3]$. Vérifier ensuite le résultat par un produit matriciel.

Exercice 2.7. Puissances d'une matrice. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 , N^3 et N^4 .
2. En déduire N^k pour tout entier $k \geq 4$.
3. La matrice N est-elle inversible ? Donner deux justifications différentes.

3 TD 3 — Sous-espaces et indépendance linéaire

3.1 Objectifs

Cette fiche mobilise les notions du cours C4 : sous-espaces vectoriels, noyau et image d'une matrice, espaces engendrés, familles génératrices et indépendance linéaire.

Les exercices 1 à 6 constituent le cœur de la séance. Les exercices 7 et 8 prolongent le travail et permettent de s'entraîner.

Exercice 3.1. Reconnaître un sous-espace. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Justifier par le critère le plus rapide lorsqu'il suffit, et donner un contre-exemple précis lorsqu'une stabilité échoue.

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\},$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y \text{ et } 2x = y\},$$

$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y + 1\},$$

$$F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}.$$

Lorsqu'il s'agit d'un sous-espace, l'écrire sous la forme $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$.

Exercice 3.2. Noyau d'une matrice. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. En déduire une écriture de $\text{Ker}(A)$ comme espace engendré par deux vecteurs.
3. Vérifier directement que cet ensemble est stable par combinaison linéaire.
4. L'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = (1, 2)^\top$ est-il un sous-espace vectoriel ? Justifier sans résoudre complètement le système.

Exercice 3.3. Appartenance à un espace engendré. Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1).$$

1. Déterminer si $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$ et $\mathbf{c} = (1, 1, 3)$ appartiennent à $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Donner les coefficients lorsqu'ils existent.
2. Caractériser les vecteurs (x, y, z) de cet espace par une équation reliant leurs coordonnées.
3. Vérifier à partir de cette équation que l'ensemble obtenu est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4. Profils biologiques atteignables. Deux signatures biologiques sont placées dans les colonnes de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $P(\alpha, \beta)^\top$ comme combinaison linéaire des colonnes de P .
2. Caractériser $\text{Im}(P)$ par une équation reliant les trois coordonnées d'un profil (x, y, z) .
3. Les profils $(2, 5, 1)$ et $(1, 1, 1)$ appartiennent-ils à $\text{Im}(P)$? Donner les coefficients lorsqu'ils existent.
4. Interpréter l'incompatibilité éventuelle comme une limite du modèle à deux signatures.

Exercice 3.5. Familles libres ou liées. Étudier l'indépendance linéaire des deux familles suivantes. Lorsqu'une famille est liée, donner une relation linéaire non triviale et retirer un vecteur superflu sans modifier l'espace engendré.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= ((1, 0, -1), (-1, 2, 1), (3, -4, -3)), \\ \mathcal{G} &= ((1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 2, 2)).\end{aligned}$$

La famille libre obtenue à partir de $\mathcal{F}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\mathcal{G}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.6. Indépendance suivant un paramètre. Soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel réel.

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ sont linéairement indépendants.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, discuter l'indépendance des vecteurs $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
3. Dans le cas où la famille est liée, expliciter une relation linéaire non triviale.

3.2 Pour s'entraîner

Exercice 3.7. Égalité de deux espaces engendrés. Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (1, 2, -1, 3), & \mathbf{u}_2 &= (2, 4, 1, -2), & \mathbf{u}_3 &= (3, 6, 3, -7), \\ \mathbf{v}_1 &= (1, 2, -4, 11), & \mathbf{v}_2 &= (2, 4, -5, 14).\end{aligned}$$

On pose $U = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ et $V = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

1. Exprimer chaque $\mathbf{u}_i$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. En déduire $U \subset V$.
2. Exprimer $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ comme combinaisons linéaires de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$. En déduire $V \subset U$.
3. Conclure et identifier un vecteur superflu dans la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Exercice 3.8. Noyau, image et redondance. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et écrire $\text{Ker}(M)$ comme espace engendré.
2. Montrer que $\text{Im}(M) = \mathbb{R}^2$.
3. Donner deux relations linéaires non triviales entre les colonnes de M .
4. Retirer deux colonnes superflues tout en conservant le même espace engendré, puis vérifier que les colonnes restantes sont linéairement indépendantes.

4 TD 4 — Bases, dimension et rang

4.1 Objectifs

Cette fiche mobilise les notions du cours C5 : bases et coordonnées, dimension, rang d'une matrice, noyau, image et théorème du rang.

Le QCM permet de vérifier les prérequis. Les exercices 1 à 6 constituent le cœur de la séance ; les exercices 7 et 8 prolongent le travail.

4.2 QCM 2 — Bases, dimension et rang

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Justifier brièvement chaque choix.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de trois vecteurs est une base dès qu'elle est : a. orthogonale ; b. libre ; c. composée de vecteurs non nuls.
2. Si $\mathcal{B}$ est une base et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (2, -1)^\top$, alors $\mathbf{x}$ est : a. le vecteur $(2, -1)$; b. la combinaison $2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$; c. la base $\mathcal{B}$.
3. Le rang d'une matrice est égal : a. au nombre de ses colonnes ; b. au nombre de pivots ; c. à son nombre de zéros.
4. Une matrice à cinq colonnes et de rang 3 a un noyau de dimension : a. 2 ; b. 3 ; c. 5.
5. Les colonnes de la matrice d'origine correspondant aux positions pivots fournissent une base de : a. l'image ; b. le noyau ; c. $\mathbb{R}^n$ dans tous les cas.
6. Une famille de quatre vecteurs dans un espace de dimension 3 est nécessairement : a. libre ; b. liée ; c. vide.

Exercice 4.1. Coordonnées dans une base du plan. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ avec $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ et $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées de $\mathbf{x} = (5, 1)$ dans $\mathcal{B}$.
3. Reconstruire $\mathbf{x}$ à partir de ces coordonnées.

Exercice 4.2. Base et coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. On considère

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)).$$

1. Vérifier que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ par un échelonnement.
2. Déterminer les coordonnées de $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$ dans cette base.
3. Écrire $\mathbf{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exercice 4.3. Dimension d'un sous-espace. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0, x + y + z = 0\}.$$

1. Décrire tous les vecteurs de F à l'aide d'un paramètre. 2. Donner une base et la dimension de F . 3. La famille $((1, -2, 1), (2, -4, 2))$ est-elle une base de F ?

Exercice 4.4. Rang, image et noyau. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Échelonner A et déterminer son rang. 2. Donner une base de $\text{Im}(A)$ en utilisant les colonnes pivots de la matrice d'origine. 3. Déterminer une base de $\text{Ker}(A)$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice 4.5. Théorème du rang et mesures biologiques. Une matrice M possède 6 colonnes et son échelonnement comporte 4 pivots. 1. Donner $\text{rg}(M)$ et $\dim \text{Ker}(M)$. 2. Combien de paramètres libres apparaît-il dans la résolution de $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lorsqu'elle est compatible ? 3. Interpréter le résultat : six variables mesurées, mais seulement quatre directions indépendantes.

Exercice 4.6. Extraire et compléter une base. Dans $\mathbb{R}^3$, poser

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 2), \quad \mathbf{u}_4 = (0, 0, 1).$$

1. Trouver une relation de dépendance entre $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. 2. Extraire une base de $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$. 3. Déterminer les coordonnées de $(2, 3, 4)$ dans la base obtenue.

4.3 Pour s'entraîner

Exercice 4.7. Famille dépendant d'un paramètre. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la liberté de

$$\mathcal{F}_\alpha = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, \alpha)).$$

Pour quelle valeur de α la famille n'est-elle pas une base de son espace engendré ? Donner alors une relation de dépendance.

Exercice 4.8. Lecture d'une matrice de données. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de B et une base de son image. 2. Déterminer une base du noyau. 3. Identifier les colonnes redondantes et vérifier que le nombre de vecteurs obtenus dans le noyau et l'image satisfait le théorème du rang.

5 TD 5 — Distances, orthogonalité et changement de base

5.1 Objectifs

Cette fiche mobilise le cours C6 : produit scalaire, norme, distance, angle, orthogonalité, bases orthonormées et matrices de passage. Les exercices 1 à 6 constituent le cœur de la séance ; les exercices 7 et 8 servent à s'entraîner.

Exercice 5.1. Calculs euclidiens. Soient $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ et $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. 1. Calculer $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ et $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. 2. En déduire la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. 3. Les deux vecteurs sont-ils orthogonaux ? Calculer le cosinus de l'angle qu'ils forment.

Exercice 5.2. Pythagore et orthogonalité. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne $\mathbf{a} = (3, 4)$ et $\mathbf{b} = (-4, 3)$. 1. Vérifier que $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est une famille orthogonale. 2. La normaliser pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}$. 3. Décomposer $\mathbf{x} = (1, 2)$ dans cette base à l'aide de produits scalaires. 4. Vérifier la formule de Pythagore pour cette décomposition.

Exercice 5.3. Orthogonalité dans $\mathbb{R}^3$. Soient $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$. 1. Vérifier que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux. 2. Déterminer un vecteur unitaire $\mathbf{w}$ orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ parmi les vecteurs de la forme $(a, -a, b)$. 3. Montrer que $(\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|, \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|, \mathbf{w})$ est une base orthonormée.

Exercice 5.4. Une base orthonormée comme grille de lecture. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ avec $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est orthonormée. 2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{x} = (4, 2)$ dans $\mathcal{B}$ par $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$. 3. Retrouver $\mathbf{x}$ par combinaison linéaire.

Exercice 5.5. Matrice de passage. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $\mathcal{E} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$. 1. Écrire la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$. 2. Relier les coordonnées $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. 3. Calculer $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}}$ et vérifier que les deux matrices sont inverses. 4. Appliquer ces formules à $\mathbf{x} = (5, 1)$.

Exercice 5.6. Changement de base en dimension trois. On considère $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (2, 1, 0)^\top$. 1. Calculer $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ dans la base canonique. 2. Construire la matrice de passage inverse en résolvant trois systèmes, ou par le pivot de Gauss. 3. Vérifier que cette matrice ramène $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ à $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

5.2 Pour s'entraîner

Exercice 5.7. Distance et corrélation. Les profils centrés de deux individus sont $\mathbf{x} = (1, -1, 2, -2)$ et $\mathbf{y} = (2, 0, 1, -3)$. 1. Calculer leur produit scalaire et leurs normes. 2. Calculer le cosinus de l'angle entre eux. 3. Que peut-on dire de la similarité linéaire de ces deux profils ?

Exercice 5.8. Passage orthonormé. Soit $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. 1. Vérifier que $Q^\top Q = I_2$. 2. Pour $\mathbf{x} = (2, 1)$, calculer $Q\mathbf{x}$ et $Q^\top \mathbf{x}$. 3. Comparer les normes et expliquer pourquoi une base orthonormée préserve les distances.

6 TD 6 — Projection orthogonale et régression linéaire

6.1 QCM 3 — Produit scalaire, orthogonalité, projection

Une seule réponse est correcte.

1. La projection de $\mathbf{x}$ sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$ vaut : a. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$ toujours ; b. $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$; c. $\mathbf{x} - \mathbf{u}$.
2. Le résidu d'une projection orthogonale est : a. parallèle au sous-espace ; b. orthogonal au sous-espace ; c. nul dans tous les cas.
3. Les équations normales s'écrivent : a. $A\beta = b$; b. $A^\top A\beta = A^\top b$; c. $AA^\top \beta = b$.
4. La projection minimise : a. $\|A\beta - b\|$; b. $\|\beta - b\|$; c. $\det(A)$.
5. Centrer un vecteur consiste à lui retirer : a. sa première coordonnée ; b. sa projection sur $\text{Vect}(\mathbf{1})$; c. sa norme.

Exercice 6.1. Projection sur une droite. Calculer la projection de $\mathbf{x} = (2, 1, 3)$ sur la droite engendrée par $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, puis le résidu et la distance à cette droite. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 6.2. Projection sur un plan. Soit $F = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$. Déterminer la projection de $(1, 0, 2)$ sur F en utilisant un vecteur normal, puis vérifier l'orthogonalité du résidu. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 6.3. Centrage. Pour $\mathbf{x} = (3, 1, 4, 2)$, calculer la moyenne, la projection sur $\text{Vect}(\mathbf{1})$ et le vecteur centré. Vérifier que la somme de ses coordonnées est nulle. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 6.4. Moindres carrés à deux paramètres. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 2, 2)^\top$, résoudre les équations normales et calculer le résidu. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 6.5. Régression affine. Ajuster une droite $y = \beta_0 + \beta_1 x$ aux points $(0, 1), (1, 2), (2, 2)$. Écrire la matrice de conception, calculer $\hat{\beta}$ et interpréter la pente. :::
{.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

6.2 Pour s'entraîner

Exercice 6.6. Orthogonal complémentaire. Déterminer une base de $F^\perp$ pour $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, puis projeter $(2, 1, 3)$ sur F . ::: {.content-visible when-profile="prof"}
Voir la correction

...

7 TD 7 — Déterminants et diagonalisation

7.1 QCM 4

Une seule réponse est correcte.

1. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est : a. nul ; b. non nul ; c. égal à sa trace.
2. Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ avec $\mathbf{v} \neq 0$, alors λ est : a. un pivot ; b. une valeur propre ; c. un déterminant.
3. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont : a. ses termes diagonaux ; b. ses termes antidiagonaux ; c. toujours nulles.
4. Une matrice ayant n vecteurs propres indépendants est : a. diagonalisable ; b. nilpotente ; c. singulière.

Exercice 7.1. Déterminants par calcul direct. Calculer les déterminants de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, en choisissant un développement efficace. ::: {content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 7.2. Déterminant et paramètre. Pour quelles valeurs de k la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Discuter alors le nombre de solutions de $A_k x = b$. ::: {content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 7.3. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice est-elle diagonalisable ? ::: {content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 7.4. Diagonalisation complète. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en donnant P, D, P^{-1} , puis calculer A^m . ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

Exercice 7.5. Trace et déterminant. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, vérifier que la trace est la somme des valeurs propres et que le déterminant est leur produit. Calculer A^m par diagonalisation. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

7.2 Pour s'entraîner

Exercice 7.6. Matrice symétrique. Déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis écrire $S = UDU^T$. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

...

8 TD 8 — Diagonalisation et covariance dans iris

Les calculs sont réalisés en R avec le jeu de données intégré *iris*.

```
X <- as.matrix(iris[, 1:4]); Xc <- scale(X, scale = FALSE)
S <- crossprod(Xc)/(nrow(Xc)-1); ee <- eigen(S)
```

Exercice 8.1. Prise en main. Charger *iris*, examiner sa structure et vérifier les dimensions de la table. Séparer les quatre variables quantitatives et l'espèce.

```
dim(iris)
```

```
[1] 150 5
```

Exercice 8.2. Centrage et covariance. Construire la matrice centrée X_c , puis calculer la matrice de covariance empirique $S = \frac{1}{n-1} X_c^\top X_c$. Vérifier que S est symétrique.

```
round(S, 3); max(abs(S-t(S)))
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
Sepal.Length	0.686	-0.042	1.274	0.516
Sepal.Width	-0.042	0.190	-0.330	-0.122
Petal.Length	1.274	-0.330	3.116	1.296
Petal.Width	0.516	-0.122	1.296	0.581

```
[1] 0
```

Exercice 8.3. Valeurs propres. Calculer la décomposition spectrale de S avec `eigen`. Classer les valeurs propres et vérifier numériquement $S = UDU^\top$.

```
ee$values
```

```
[1] 4.22824171 0.24267075 0.07820950 0.02383509
```

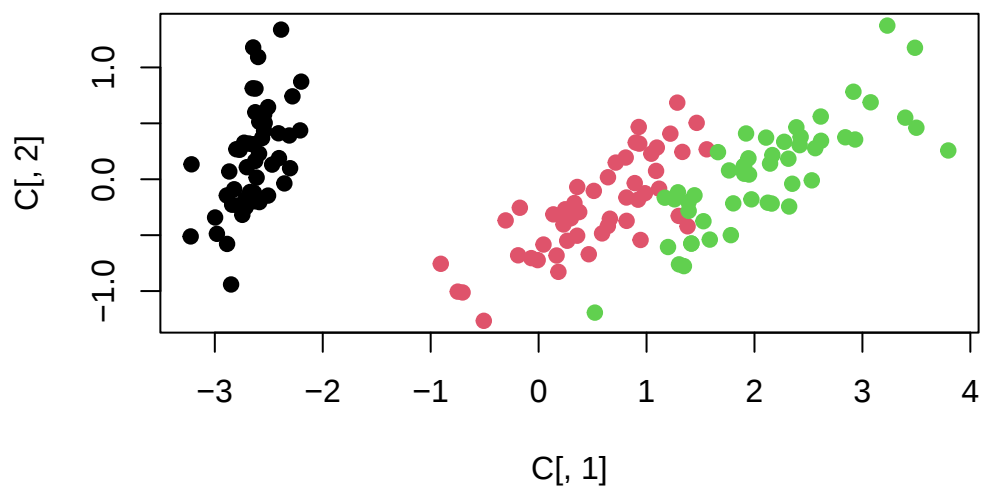
Exercice 8.4. Composantes principales. Calculer $C = X_c U$. Vérifier que les colonnes de C sont décorrélées et que leurs variances sont les valeurs propres de S .

```
C <- Xc %*% ee$eigenvectors; round(cov(C), 3)
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 4.228 0.000 0.000 0.000
[2,] 0.000 0.243 0.000 0.000
[3,] 0.000 0.000 0.078 0.000
[4,] 0.000 0.000 0.000 0.024
```

Exercice 8.5. Interprétation. Calculer les pourcentages d’inertie et représenter les individus sur les deux premiers axes, en colorant selon Species. Décrire la séparation observée.

```
plot(C[,1], C[,2], col=iris$Species, pch=19); ee$values/sum(ee$values)
```



```
[1] 0.924618723 0.053066483 0.017102610 0.005212184
```

8.1 Pour s’entraîner

Exercice 8.6. Comparer cette ACP fondée sur la covariance à celle fondée sur la matrice de corrélation (variables standardisées). Les pourcentages d’inertie changent-ils? ::: {.content-visible when-profile=“prof”} Voir la correction

:::

9 TD 9 — ACP complète sur des données biologiques

Cette séance réalise une ACP complète de *iris*, de la préparation à l'interprétation.

```
Z <- scale(as.matrix(iris[,1:4])); R <- cov(Z); ee <- eigen(R)
scores <- Z %*% ee$vectors
```

Exercice 9.1. Préparer les données : matrice quantitative, centrage-réduction et contrôle des moyennes et écarts-types.

```
round(colMeans(Z), 8); round(apply(Z, 2, sd), 3)
```

Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
0	0	0	0

Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
1	1	1	1

Exercice 9.2. Calculer la matrice de corrélation et sa décomposition spectrale. Donner les valeurs propres et les pourcentages d'inertie.

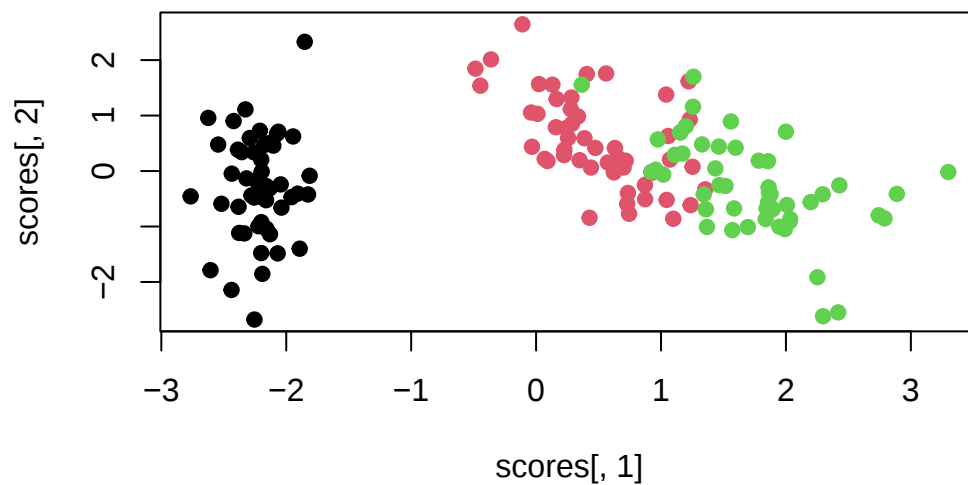
```
round(R, 3); round(ee$values/sum(ee$values)*100, 2)
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
Sepal.Length	1.000	-0.118	0.872	0.818
Sepal.Width	-0.118	1.000	-0.428	-0.366
Petal.Length	0.872	-0.428	1.000	0.963
Petal.Width	0.818	-0.366	0.963	1.000

```
[1] 72.96 22.85 3.67 0.52
```

Exercice 9.3. Calculer les coordonnées des individus sur les quatre axes et représenter le plan principal (axes 1 et 2), coloré par espèce.

```
plot(scores[,1], scores[,2], col=iris$Species, pch=19)
```



Exercice 9.4. Calculer les corrélations entre variables initiales et composantes principales. Représenter le cercle des corrélations et identifier les variables associées aux deux premiers axes.

```
round(cor(Z, scores), 3)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
Sepal.Length	0.890	-0.361	0.276	0.038
Sepal.Width	-0.460	-0.883	-0.094	-0.018
Petal.Length	0.992	-0.023	-0.054	-0.115
Petal.Width	0.965	-0.064	-0.243	0.075

Exercice 9.5. Choisir le nombre d'axes à conserver selon un seuil de 90 % d'inertie. Quantifier la qualité de représentation des individus sur le plan principal.

```
cumsum(ee$values/sum(ee$values))
```

```
[1] 0.7296245 0.9581321 0.9948213 1.0000000
```

9.1 Pour s'entraîner

Exercice 9.6. Reproduire l'analyse avec prcomp, comparer les valeurs propres et expliquer le rôle de l'option `scale.=TRUE`. ::: {.content-visible when-profile="prof"} Voir la correction

:::