

Déterminant, valeurs propres, diagonalisation

Cours 8 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

Déterminant

Une question restée ouverte

A carrée : inversible ou non ?

Une question restée ouverte

A carrée : inversible ou non ?

Le pivot de Gauss répond, après calcul complet.

A carrée : inversible ou non ?

Le pivot de Gauss répond, après calcul complet.

Objectif Un **nombre unique**, calculé à partir de A , dont l'annulation caractérise la non-inversibilité.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ordre 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Le nombre déjà rencontré au cours 3, dans la formule de l'inverse.

Aire du parallélogramme

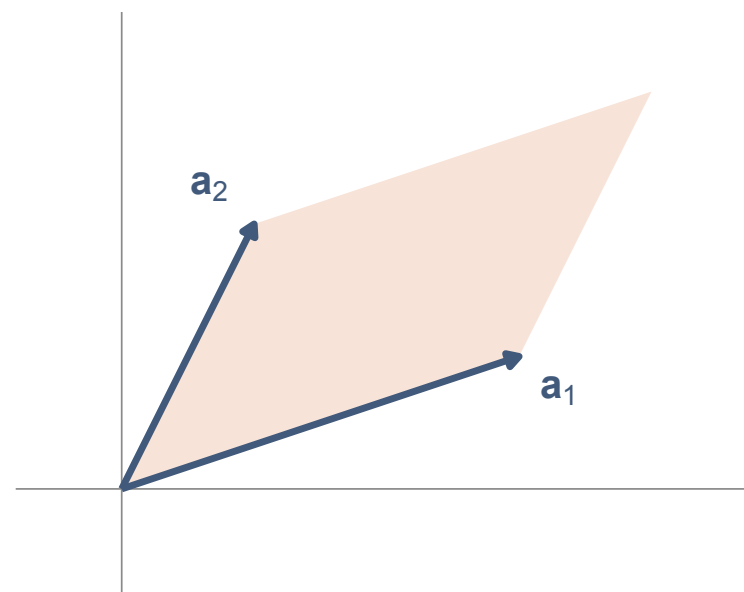


Figure 1

Le signe

$\det A > 0$: les colonnes conservent l'orientation du plan.

Le signe

$\det A > 0$: les colonnes conservent l'orientation du plan.

$\det A < 0$: orientation inversée.

Le signe

$\det A > 0$: les colonnes conservent l'orientation du plan.

$\det A < 0$: orientation inversée.

$\det A = 0$: le parallélogramme est **aplati**. Colonnes colinéaires.

Ordre 3

Développement selon la première ligne :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

Ordre 3

Développement selon la première ligne :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

A_{ij} : la matrice 2×2 obtenue en **supprimant** la ligne i et la colonne j .

Un calcul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ordre 3

Développement selon la première ligne :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

A_{ij} : la matrice 2×2 obtenue en **supprimant** la ligne i et la colonne j .

En dimension 3, $|\det A|$ est un **volume**.

Un calcul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(1 - 0) - 2(3 - 2) + 0 = 1 - 2 = -1$$

Alternance des signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Alternance des signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Le développement peut se faire selon **n'importe quelle** ligne ou colonne.

Alternance des signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Le développement peut se faire selon **n'importe quelle** ligne ou colonne.

Choisir celle qui contient le plus de zéros.

Matrice triangulaire

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Matrice triangulaire

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Le produit des termes diagonaux.

Propriétés

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \cdot \det B, & \det(A^\top) &= \det A \\ \det(\lambda A) &= \lambda^n \det A, & \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

Matrice triangulaire

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Le produit des termes diagonaux.

Une forme échelonnée est triangulaire : son déterminant se lit.

Propriétés

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \cdot \det B, & \det(A^\top) &= \det A \\ \det(\lambda A) &= \lambda^n \det A, & \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

Aucune formule pour $\det(A + B)$.

Effet des opérations élémentaires

Opération	Effet sur det
$L_i \leftrightarrow L_j$	changement de signe
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	multiplication par λ
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	inchangé

Effet des opérations élémentaires

Opération	Effet sur det
$L_i \leftrightarrow L_j$	changement de signe
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	multiplication par λ
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	inchangé

D'où une méthode de calcul : échelonner, puis multiplier les pivots.

Calcul par échelonnement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1, L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul par échelonnement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1, L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{5}L_2 : \text{ dernier pivot } \frac{1}{5}.$$

$$\det A = 1 \times (-5) \times \frac{1}{5} = -1$$

Calcul par échelonnement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1, L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{5}L_2 : \text{ dernier pivot } \frac{1}{5}.$$

$$\det A = 1 \times (-5) \times \frac{1}{5} = -1$$

Les transvections ne changent rien. Seul le produit des pivots compte.

Critère d'inversibilité

Théorème

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

Critère d'inversibilité

Théorème

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

$$\det A \neq 0 \iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

Critère d'inversibilité

Théorème

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

$$\det A \neq 0 \iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

Le dernier ajout à la liste du cours 5.

Ordre n : $n!$ termes. Impraticable au-delà de 3 ou 4.

Ordre n : $n!$ termes. Impraticable au-delà de 3 ou 4.

Position dans ce cours Le déterminant sert ici à **une seule chose** : écrire l'équation qui donne les valeurs propres.

Directions préservées

Valeurs propres

A transforme les vecteurs. Certaines directions résistent.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Directions préservées

A transforme les vecteurs. Certaines directions résistent.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

λ : **valeur propre**. $\mathbf{v}$: **vecteur propre** associé.

La condition d'existence

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Directions invariantes

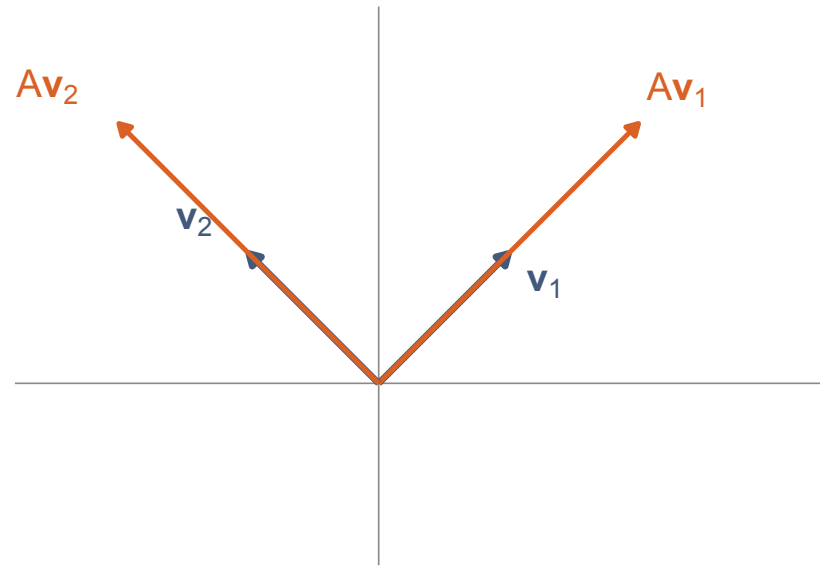


Figure 2

La direction est conservée, la longueur non.

La condition d'existence

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Un $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ existe $\iff A - \lambda I_n$ **n'est pas inversible**.

La condition d'existence

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Un $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ existe $\iff A - \lambda I_n$ **n'est pas inversible**.

Équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Polynôme caractéristique

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$: un polynôme de degré n .

Polynôme caractéristique

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$: un polynôme de degré n .

Ses racines : les valeurs propres de A .

Polynôme caractéristique

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$: un polynôme de degré n .

Ses racines : les valeurs propres de A .

$$\text{Sp}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \chi_A(\lambda) = 0 \}$$

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

$$\text{Sp}(A) = \{2, 4\}$$

Espace propre

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Espace propre

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Un sous-espace vectoriel, de dimension au moins 1.

Les vecteurs propres de l'exemple

$\lambda = 4$: $(A - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ donne $-v_1 + v_2 = 0$.

$$E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Espace propre

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Un sous-espace vectoriel, de dimension au moins 1.

Le calcul : un système homogène. Le pivot de Gauss, encore.

Les vecteurs propres de l'exemple

$\lambda = 4$: $(A - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ donne $-v_1 + v_2 = 0$.

$$E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = 2$: $v_1 + v_2 = 0$.

$$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Deux raccourcis

$$\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A), \quad \prod_i \lambda_i = \det A$$

Deux raccourcis

$$\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A), \quad \prod_i \lambda_i = \det A$$

$\text{tr}(A)$: la somme des termes diagonaux.

Deux raccourcis

$$\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A), \quad \prod_i \lambda_i = \det A$$

Deux multiplicités

Algébrique m_λ — l'ordre de λ comme racine de χ_A .

Géométrique — $\dim E_\lambda$.

$\text{tr}(A)$: la somme des termes diagonaux.

Sur l'exemple : $2 + 4 = 6$ et $2 \times 4 = 8$.

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

Deux multiplicités

Indépendance

Algébrique m_λ — l'ordre de λ comme racine de χ_A .

Géométrique — $\dim E_\lambda$.

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

L'écart entre les deux décide de la diagonalisabilité.

Théorème Des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** forment une famille libre.

Indépendance

Théorème Des vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** forment une famille libre.

n valeurs propres distinctes : une base de vecteurs propres.

Diagonalisation

L'objectif

Une matrice diagonale se manipule sans effort.

L'objectif

Une matrice diagonale se manipule sans effort.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

L'objectif

Une matrice diagonale se manipule sans effort.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ramener A à cette forme.

Définition

A est **diagonalisable** s'il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Définition

A est **diagonalisable** s'il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Colonnes de P : des vecteurs propres. Termes de D : les valeurs propres associées.

Critère de diagonalisabilité

Théorème A est diagonalisable $\iff$ il existe une **base de vecteurs propres** de $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_{\lambda} = n$$

Définition

A est **diagonalisable** s'il existe P inversible et D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Colonnes de P : des vecteurs propres. Termes de D : les valeurs propres associées.

L'ordre doit correspondre.

Matrices semblables

A et B sont **semblables** s'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

$$\chi_A = \chi_B, \quad \text{Sp}(A) = \text{Sp}(B), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B), \quad \det A = \det B$$

A et B sont **semblables** s'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

1. Calculer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

$$\chi_A = \chi_B, \quad \text{Sp}(A) = \text{Sp}(B), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B), \quad \det A = \det B$$

Diagonaliser : trouver une matrice **diagonale semblable** à A .

1. Calculer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
2. En chercher les racines : les valeurs propres.

1. Calculer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
2. En chercher les racines : les valeurs propres.
3. Pour chaque λ , résoudre $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

1. Calculer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
2. En chercher les racines : les valeurs propres.
3. Pour chaque λ , résoudre $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
4. Réunir les bases obtenues. n vecteurs : A est diagonalisable.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le fil du cours 6 P est une **matrice de passage**. D est l'écriture de A dans la base des vecteurs propres.

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = D[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Le fil du cours 6 P est une **matrice de passage**. D est l'écriture de A dans la base des vecteurs propres.

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \iff [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = D[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Dans la bonne base, A ne fait que **dilater chaque axe**.

P^{-1} décode, D dilate, P recode.

$$A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x}$$

P^{-1} décode, D dilate, P recode.

$$A\mathbf{x} = PDP^{-1}\mathbf{x}$$

Toute la difficulté de A est reportée sur le **choix de la base**.

$A = PDP^{-1}$ équivaut à $AP = PD$.

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = PD$$

Vérification sans inverse

Puissances

$A = PDP^{-1}$ équivaut à $AP = PD$.

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = PD$$

Aucun inverse à calculer pour vérifier.

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Puissances

Puissances

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Les termes intermédiaires $P^{-1}P$ se simplifient.

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Les termes intermédiaires $P^{-1}P$ se simplifient.

Un calcul de n puissances de scalaires, au lieu de k produits matriciels.

Quand cela échoue

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_N(\lambda) = \lambda^2$$

Quand cela échoue

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_N(\lambda) = \lambda^2$$

$\lambda = 0$ est racine double, mais $\dim E_0 = 1$.

Quand cela échoue

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_N(\lambda) = \lambda^2$$

$\lambda = 0$ est racine double, mais $\dim E_0 = 1$.

Non diagonalisable Pas assez de vecteurs propres pour former une base.

Racines complexes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_R(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Racines complexes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_R(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Aucune racine réelle : une rotation ne préserve aucune direction.

Racines complexes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_R(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Aucune racine réelle : une rotation ne préserve aucune direction.

Ce qui suit Les matrices du cours 9 sont **symétriques**. Ces deux échecs n'y surviennent jamais.

Dynamique de deux populations

$\mathbf{x}_k$: les effectifs à la génération k .

$$\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k \implies \mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = P D^k P^{-1} \mathbf{x}_0$$

Dynamique de deux populations

$\mathbf{x}_k$: les effectifs à la génération k .

$$\mathbf{x}_{k+1} = A \mathbf{x}_k \implies \mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = P D^k P^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} : \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2.$$

Comportement à long terme

$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ dans la base propre :

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 4^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 2^k \mathbf{v}_2$$

Valeur propre dominante 4^k écrase 2^k . La population s'aligne sur $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ et croît d'un facteur 4 par génération.
Une direction privilégiée, imposée par les données.

Comportement à long terme

$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ dans la base propre :

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 4^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 2^k \mathbf{v}_2$$

Comportement à long terme

$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ dans la base propre :

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 4^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 2^k \mathbf{v}_2$$

Valeur propre dominante 4^k écrase 2^k . La population s'aligne sur $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ et croît d'un facteur 4 par génération.

Récapitulatif

Étape	Calcul
Valeurs propres	racines de $\det(A - \lambda I_n) = 0$
Espaces propres	$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, par le pivot
Diagonalisable ?	$\sum_\lambda \dim E_\lambda = n$
P	vecteurs propres en colonnes
D	valeurs propres, dans le même ordre
Vérification	$AP = PD$