

Produit scalaire, orthogonalité, changement de base

Cours 6 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

Mesurer

Une question sans réponse

Une question sans réponse

Deux gènes, leurs profils d'expression dans n échantillons.

Deux gènes, leurs profils d'expression dans n échantillons.

Ont-ils le **même comportement** ?

Une question sans réponse

Ce qui manque

Deux gènes, leurs profils d'expression dans n échantillons.

Ont-ils le **même comportement** ?

Rien dans les cours 1 à 5 ne permet de répondre.

Longueur, distance, angle.

Ce qui manque

Produit scalaire

Longueur, distance, angle.

Une seule opération suffit Le **produit scalaire** engendre à lui seul les trois notions.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Deux vecteurs entrent, **un nombre** sort.

Propriétés

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &\geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Deux vecteurs entrent, **un nombre** sort.

Notation également rencontrée : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Propriétés

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &\geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Symétrie, linéarité, positivité.

Norme

Norme et distance

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Norme

Vecteur unitaire

$$\|\mathbf{u}\| = 1.$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

La longueur du vecteur. En dimension 2, le théorème de Pythagore.

Vecteur unitaire

$$\|\mathbf{u}\| = 1.$$

Tout vecteur non nul se **normalise** :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1$$

Distance

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Vecteur unitaire

$$\|\mathbf{u}\| = 1.$$

Tout vecteur non nul se **normalise** :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1$$

La direction est conservée, la longueur ramenée à 1.

Distance

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

La distance euclidienne, en dimension quelconque.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

Conséquence

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ non nuls :

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

Égalité si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont **colinéaires**.

Conséquence

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ non nuls :

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Un nombre entre -1 et 1 .

Inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Un détour n'est jamais plus court que la ligne droite.

Inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Un détour n'est jamais plus court que la ligne droite.

Conséquence directe de Cauchy-Schwarz.

Angle et corrélation

Définition de l'angle

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Définition de l'angle

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Cauchy-Schwarz garantit que cette définition a un sens.

Lecture géométrique

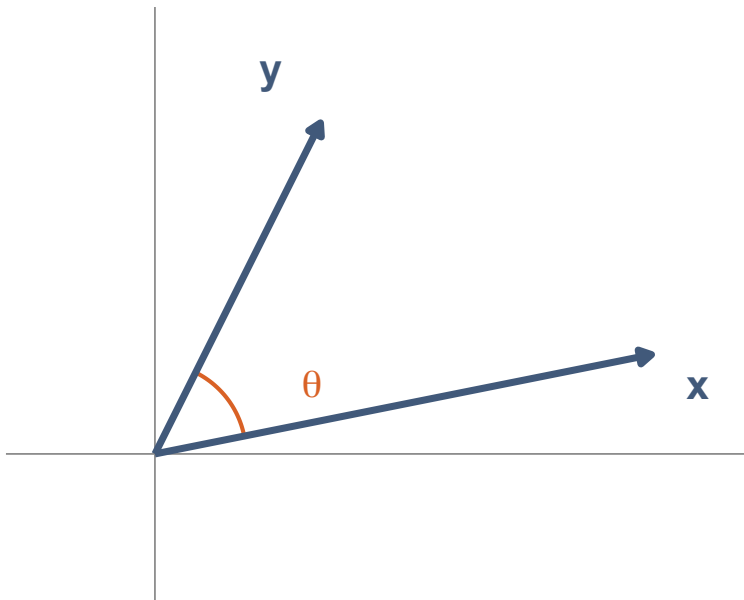


Figure 1

Données centrées

$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{x} \mathbf{1}$: la variable, moyenne retranchée.

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle$$

$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{x} \mathbf{1}$: la variable, moyenne retranchée.

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle$$

Variance et covariance : une norme et un produit scalaire.

Résultat central

$$\text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{x}}\| \|\tilde{\mathbf{y}}\|} = \cos \theta$$

Résultat central

$$\text{cor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{x}}\| \|\tilde{\mathbf{y}}\|} = \cos \theta$$

Le coefficient de corrélation **est** le cosinus de l'angle entre les variables centrées.

$\cos \theta$	Angle	Interprétation
1	0	même direction — profils proportionnels
0	$\pi/2$	directions orthogonales — décorrélation
-1	π	directions opposées — profils inversés

Trois valeurs à lire

$\cos \theta$	Angle	Interprétation
1	0	même direction — profils proportionnels
0	$\pi/2$	directions orthogonales — décorrélation
-1	π	directions opposées — profils inversés

Une corrélation nulle devient une **perpendicularité**.

Un calcul complet

$\mathbf{x} = (2, 4, 6, 8), \quad \mathbf{y} = (1, 3, 2, 4).$

$\tilde{\mathbf{x}} = (-3, -1, 1, 3), \quad \tilde{\mathbf{y}} = (-1,5, 0,5, -0,5, 1,5)$

Un calcul complet

$\mathbf{x} = (2, 4, 6, 8), \quad \mathbf{y} = (1, 3, 2, 4).$

$\tilde{\mathbf{x}} = (-3, -1, 1, 3), \quad \tilde{\mathbf{y}} = (-1,5, 0,5, -0,5, 1,5)$

$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle = 8, \quad \|\tilde{\mathbf{x}}\| = \sqrt{20}, \quad \|\tilde{\mathbf{y}}\| = \sqrt{5} \implies \cos \theta = \frac{8}{10} = 0,8$

Pourquoi cela compte

Un tableau de p variables : p vecteurs, leurs angles deux à deux.

Pourquoi cela compte

Un tableau de p variables : p vecteurs, leurs angles deux à deux.

Vers l'ACP Des variables très corrélées pointent presque dans la **même direction**. Elles occupent moins de p dimensions.

Définition

Orthogonalité

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

Définition

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

Le vecteur $\mathbf{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Théorème de Pythagore

Théorème

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

Le double produit disparaît.

Théorème de Pythagore

Théorème

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

Famille orthogonale

Vecteurs **non nuls**, orthogonaux deux à deux.

$$\forall i \neq j, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$$

Vecteurs **non nuls**, orthogonaux deux à deux.

$$\forall i \neq j, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$$

Propriété Une famille orthogonale est toujours **libre**.

Une combinaison nulle, mise en produit scalaire avec $\mathbf{v}_k$:

$$\left\langle \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \right\rangle = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$$

Une combinaison nulle, mise en produit scalaire avec $\mathbf{v}_k$:

$$\left\langle \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \right\rangle = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$$

$\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, donc $\alpha_k = 0$. Pour tout k .

Une combinaison nulle, mise en produit scalaire avec $\mathbf{v}_k$:

$$\left\langle \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \right\rangle = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = 0$$

$\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, donc $\alpha_k = 0$. Pour tout k .

L'orthogonalité **offre** la liberté.

Base orthonormée

Une base orthogonale, dont tous les vecteurs sont unitaires.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Coordonnées sans système

L'avantage décisif Dans une base orthonormée, les coordonnées sont de simples **produits scalaires**.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

Base orthonormée

Une base orthogonale, dont tous les vecteurs sont unitaires.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ en est une.

Coordonnées sans système

L'avantage décisif Dans une base orthonormée, les coordonnées sont de simples **produits scalaires**.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

Aucun système à résoudre. Aucun inverse à calculer.

Identification des coefficients

$\mathcal{B}$ est une base : la décomposition **existe** et est unique.

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$$

Identification des coefficients

$\mathcal{B}$ est une base : la décomposition **existe** et est unique.

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$$

Produit scalaire des deux membres avec $\mathbf{u}_i$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{ji} = \alpha_i$$

Identification des coefficients

$\mathcal{B}$ est une base : la décomposition **existe** et est unique.

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$$

Produit scalaire des deux membres avec $\mathbf{u}_i$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{ji} = \alpha_i$$

Le même geste qu'à la slide « Orthogonalité et liberté ».

Deux hypothèses, deux rôles

Partage des rôles **Base** : la décomposition existe. **Orthonormalité** : ses coefficients se calculent sans système.

Deux hypothèses, deux rôles

Partage des rôles **Base** : la décomposition existe. **Orthonormalité** : ses coefficients se calculent sans système.

Base orthogonale non normée : $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2}.$

Comparaison

Base	Coordonnées
quelconque	résoudre $B\alpha = \mathbf{x}$
orthonormée	$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$

Deux hypothèses, deux rôles

Partage des rôles **Base** : la décomposition existe. **Orthonormalité** : ses coefficients se calculent sans système.

Base orthogonale non normée : $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2}.$

Les vecteurs unitaires font disparaître le dénominateur.

Comparaison

Base	Coordonnées
quelconque	résoudre $B\alpha = \mathbf{x}$
orthonormée	$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$

Les bases orthonormées seront **fournies** dans ce cours. Leur construction n'est pas au programme.

Une base orthonormée du plan

Les vecteurs du cours 5, normalisés :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées, sans calcul

$\mathbf{x} = (4, 2)$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{4+2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{-4+2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Une base orthonormée du plan

Les vecteurs du cours 5, normalisés :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unitaires, et orthogonaux : $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$.

Les coordonnées, sans calcul

$\mathbf{x} = (4, 2)$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{4+2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{-4+2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Deux produits scalaires, là où le cours 5 résolvait un système.

$\mathbf{x} = (4, 2)$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{4+2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{-4+2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Deux produits scalaires, là où le cours 5 résolvait un système.

Mêmes directions qu'au cours 5, où $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (3, -1)$: la normalisation change l'échelle, pas la lecture.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \quad \alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle, \quad \beta_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle$$

Produit scalaire et coordonnées

Norme dans une base orthonormée

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \quad \alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle, \quad \beta_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle^2$$

Condition Cette formule vaut dans une base **orthonormée**. Nulle part ailleurs.

Norme dans une base orthonormée

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle^2$$

Pythagore, en dimension n .

Norme dans une base orthonormée

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle^2$$

Pythagore, en dimension n .

À retenir pour l'ACP La norme se **répartit** sur les axes d'une base orthonormée. Chaque axe en porte une part.

Matrice de passage

Changement de base

$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$: la matrice P dont les colonnes sont les $\mathbf{b}_j$.

$$P = [\mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_n]$$

Matrice de passage

Les deux formules

$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$: la matrice P dont les colonnes sont les $\mathbf{b}_j$.

$$P = [\mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_n]$$

$\mathcal{B}$ est une base : P est **invertible**.

$$\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathbf{x}$$

Les deux formules

Les deux formules

$$\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathbf{x}$$

La formule du cours 5, avec son nom.

$$\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathbf{x}$$

La formule du cours 5, avec son nom.

P **reconstruit** le vecteur ; P^{-1} le **décode**.

Le sens du produit

P transporte des coordonnées $\mathcal{B}$ vers des coordonnées canoniques.

Le sens du produit

P transporte des coordonnées $\mathcal{B}$ vers des coordonnées canoniques.

Source d'erreurs P contient les vecteurs de la **nouvelle** base, exprimés dans l'**ancienne**. Jamais l'inverse.

Matrice orthogonale

Une matrice carrée dont les colonnes forment une base **orthonormée**.

$$P^\top P = I_n \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = P^\top$$

Matrice orthogonale

Une matrice carrée dont les colonnes forment une base **orthonormée**.

$$P^\top P = I_n \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = P^\top$$

L'inverse s'obtient par simple transposition.

Le produit $P^\top P$

Le coefficient (i, j) de $P^\top P$:

$$(P^\top P)_{ij} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Un exemple

La rotation d'angle θ :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le produit $P^\top P$

Le coefficient (i, j) de $P^\top P$:

$$(P^\top P)_{ij} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$$

L'orthonormalité des colonnes, écrite matriciellement.

Un exemple

La rotation d'angle θ :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Colonnes unitaires et orthogonales.

$$P^{-1} = P^\top = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ce que préserve une matrice orthogonale

$$\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

Ce que préserve une matrice orthogonale

$$\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

Longueurs, angles, distances : tout est conservé.

Ce que préserve une matrice orthogonale

$$\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

Longueurs, angles, distances : tout est conservé.

Interprétation Un changement de base orthonormée est une **rotation** du repère. Les données ne bougent pas ; le point de vue change.

Récapitulatif

Notion	Formule	Usage
Produit scalaire	$\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$	tout le reste en découle
Norme	$\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	longueur, variance
Angle	$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\ \mathbf{x}\ \ \mathbf{y}\ }$	corrélation
Orthogonalité	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$	décorrélation, liberté
Base orthonormée	$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$	coordonnées immédiates
Passage	$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \mathbf{x},$ $P^{-1} = P^\top$	changement de repère