

Base, coordonnées, dimension et rang
Cours 5 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

La bonne famille

Le dilemme du cours 4

Génératrice — assez de vecteurs.

Libre — pas de vecteur superflu.

Le dilemme du cours 4

Génératrice — assez de vecteurs.

Libre — pas de vecteur superflu.

Deux exigences opposées. Une famille peut satisfaire les deux.

Base

Base canonique

Une famille **libre et génératrice** de F .

$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ base de $F \iff \text{Vect}(\mathcal{B}) = F$ et $\mathcal{B}$ libre

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base canonique

Reconnaître une base

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La plus commode de $\mathbb{R}^3$. **Pas la seule.**

n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, rangés en colonnes dans A :

$\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n \iff n$ pivots $\iff A$ inversible

n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, rangés en colonnes dans A :

$$\mathcal{B} \text{ base de } \mathbb{R}^n \iff n \text{ pivots} \iff A \text{ inversible}$$

Convergence La liste du cours 3 s'allonge : A inversible $\iff$ ses colonnes forment une base.

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un exemple dans le plan

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non colinéaires : deux pivots, donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Coordonnées

Unicité de l'écriture

Pourquoi

Théorème $\mathcal{B}$ base de F : tout $\mathbf{x} \in F$ s'écrit **d'une seule manière** comme combinaison linéaire de $\mathcal{B}$.

$$\forall \mathbf{x} \in F, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p : \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p$$

Deux écritures de $\mathbf{x}$: leur différence est une combinaison nulle.

$$\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_i \beta_i \mathbf{v}_i \implies \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Pourquoi

Pourquoi

Deux écritures de $\mathbf{x}$: leur différence est une combinaison nulle.

$$\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_i \beta_i \mathbf{v}_i \implies \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Famille libre : tous les $\alpha_i - \beta_i$ sont nuls.

Deux écritures de $\mathbf{x}$: leur différence est une combinaison nulle.

$$\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_i \beta_i \mathbf{v}_i \implies \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Famille libre : tous les $\alpha_i - \beta_i$ sont nuls.

La liberté fait l'unicité. La génération fait l'existence.

Coordonnées d'un vecteur

Les α_i : les **coordonnées** de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{B}$.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Calcul des coordonnées

$\mathbf{x} = (4, 2)$ dans $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Coordonnées d'un vecteur

Les α_i : les **coordonnées** de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{B}$.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^p$, distinct de $\mathbf{x}$.

Calcul des coordonnées

$\mathbf{x} = (4, 2)$ dans $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Un système linéaire. Solution : $\alpha = 3$, $\beta = -1$.

Coordonnées par l'inverse

B : la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}$$

Le même vecteur, deux listes

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées par l'inverse

B : la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}$$

$\mathcal{B}$ est une base : B est inversible. La formule a toujours un sens.

Le même vecteur, deux listes

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Point capital Le vecteur ne change pas. Seule change la **grille de lecture**.

Lecture dans la base canonique

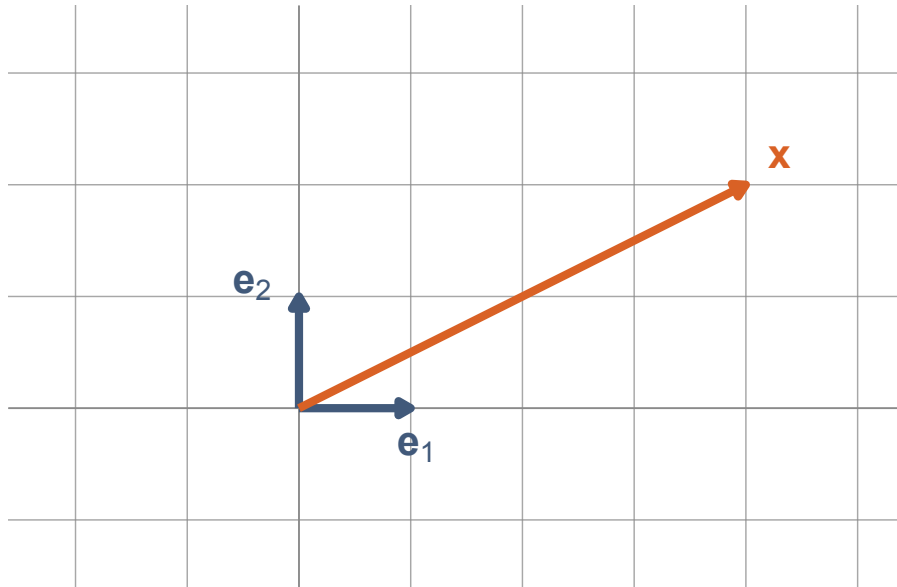


Figure 1

Ce qui se prépare

Changer de base : changer les nombres qui décrivent les mêmes données.

Lecture dans la base $\mathcal{B}$

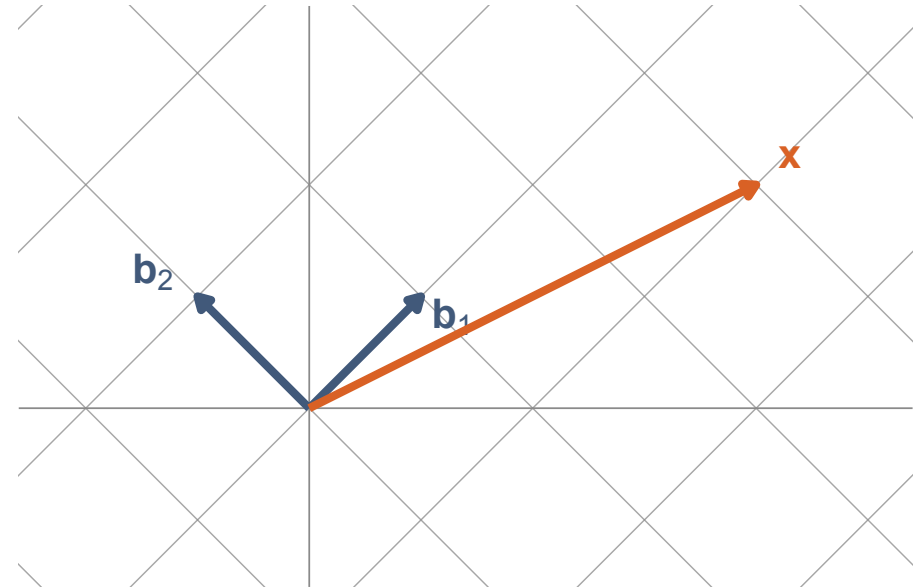


Figure 2

Ce qui se prépare

Changer de base : changer les nombres qui décrivent les mêmes données.

Première marche L'ACP consiste à **choisir la base** dans laquelle les données se lisent le mieux.

Ce qui se prépare

Changer de base : changer les nombres qui décrivent les mêmes données.

Première marche L'ACP consiste à **choisir la base** dans laquelle les données se lisent le mieux.

La mécanique du changement de base : cours 6.

Dimension

Un invariant

Théorème Toutes les bases d'un même sous-espace ont le **même nombre** de vecteurs.

Un invariant

Théorème Toutes les bases d'un même sous-espace ont le **même nombre** de vecteurs.

Ce nombre : la **dimension** de F , notée $\dim F$.

Valeurs de référence

Sous-espace	Dimension
$\{\mathbf{0}\}$	0
Droite par l'origine	1
Plan par l'origine	2
$\mathbb{R}^n$	n

Valeurs de référence

Sous-espace	Dimension
$\{\mathbf{0}\}$	0
Droite par l'origine	1
Plan par l'origine	2
$\mathbb{R}^n$	n

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ compte n vecteurs.

Deux bornes

$p > \dim F \implies$ famille liée, $p < \dim F \implies$ famille non génératrice

Deux bornes

$p > \dim F \implies$ famille liée, $p < \dim F \implies$ famille non génératrice

Trop de vecteurs : redondance. Trop peu : insuffisance.

Critère par le cardinal

Théorème Dans un espace de dimension n , pour une famille de **exactement** n **vecteurs**, les propriétés « libre », « génératrice » et « base » sont **équivalentes**.

$$\text{card } \mathcal{F} = \dim F \implies (\mathcal{F} \text{ libre} \iff \mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ base})$$

Compléter, extraire

Toute famille libre se **complète** en une base.

Toute famille génératrice **contient** une base.

$$\mathcal{L} \text{ libre} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \text{ génératrice}$$

Critère par le cardinal

Théorème Dans un espace de dimension n , pour une famille de **exactement** n **vecteurs**, les propriétés « libre », « génératrice » et « base » sont **équivalentes**.

$$\text{card } \mathcal{F} = \dim F \implies (\mathcal{F} \text{ libre} \iff \mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ base})$$

Au bon cardinal, une seule des deux propriétés reste à vérifier.

Compléter, extraire

Toute famille libre se **complète** en une base.

Toute famille génératrice **contient** une base.

$$\mathcal{L} \text{ libre} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \text{ génératrice}$$

Une base : une famille libre maximale, ou génératrice minimale.

Rang d'une matrice

Rang

Le **rang** de A : la dimension de son image.

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Rang d'une matrice

Calcul

Le **rang** de A : la dimension de son image.

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Le nombre de colonnes **réellement** indépendantes.

Résultat $\operatorname{rg}(A)$ = nombre de **pivots** de toute forme échelonnée de A .

Calcul

Lignes et colonnes

Résultat $\text{rg}(A)$ = nombre de **pivots** de toute forme échelonnée de A .

Le r du cours 2, sous son vrai nom.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$$

Lignes et colonnes

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$$

Autant de lignes indépendantes que de colonnes indépendantes.

Lignes et colonnes

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$$

Autant de lignes indépendantes que de colonnes indépendantes.

Le résultat est admis.

Bornes

$$\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

Bornes

$$\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

Une matrice $3 \times 500\,000$ a un rang au plus égal à 3.

Bornes

$$\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice $3 \times 500\,000$ a un rang au plus égal à 3.

La symétrie lignes-colonnes rend ce plafond immédiat.

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 = 2L_1$: une ligne pour rien.

Un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 = 2L_1$: une ligne pour rien.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2$$

Base de l'image

Les **colonnes pivots** de A forment une base de $\text{Im}(A)$.

Piège Les colonnes de A **d'origine**, pas celles de la forme échelonnée. L'échelonnement change l'image, il ne conserve que les **positions** des pivots.

Base du noyau

La description paramétrique du cours 2 livre directement une base.

$$\mathcal{S}_0 = \{ t_1 \mathbf{d}_1 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{d}_{n-r} \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

La description paramétrique du cours 2 livre directement une base.

$$\mathcal{S}_0 = \{ t_1 \mathbf{d}_1 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{d}_{n-r} \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

Un vecteur $\mathbf{d}_i$ par variable libre. Ils sont libres, et générateurs.

La description paramétrique du cours 2 livre directement une base.

$$\mathcal{S}_0 = \{ t_1 \mathbf{d}_1 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{d}_{n-r} \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

Un vecteur $\mathbf{d}_i$ par variable libre. Ils sont libres, et générateurs.

D'où $\dim \text{Ker}(A) = n - r$.

L'énoncé

Théorème du rang

Théorème du rang Pour toute matrice A à n colonnes :

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rg}(A) = n$$

n inconnues, réparties en deux groupes.

$$\underbrace{n-r}_{\text{variables libres}} + \underbrace{r}_{\text{variables liées}} = n$$

n inconnues, réparties en deux groupes.

$$\underbrace{n-r}_{\text{variables libres}} + \underbrace{r}_{\text{variables liées}} = n$$

Le théorème du rang, déjà rencontré au cours 2 sans son nom.

Noyau de l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 2, \quad n = 3$$

Noyau de l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 2, \quad n = 3$$

Une variable libre, donc $\dim \text{Ker}(A) = 1$.

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Un arbitrage

Rang élevé : image grande, noyau petit.

Un arbitrage

Rang élevé : image grande, noyau petit.

Rang faible : beaucoup de redondance, noyau grand.

Un arbitrage

Rang élevé : image grande, noyau petit.

Rang faible : beaucoup de redondance, noyau grand.

Conservation La somme est **fixée** par le nombre de colonnes. Gagner d'un côté, perdre de l'autre.

Matrices carrées

A carrée d'ordre n :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n \iff \text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

A carrée d'ordre n :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n \iff \text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

Le rang maximal, dit « rang plein ».

Pour A carrée d'ordre n , équivalences :

- ▶ A est inversible
- ▶ $A \sim I_n$, A possède n pivots
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la seule solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique, pour tout $\mathbf{b}$
- ▶ **les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$**
- ▶ $\text{rg}(A) = n$, $\dim \text{Ker}(A) = 0$

La liste, complétée

Pour A carrée d'ordre n , équivalences :

- ▶ A est inversible
- ▶ $A \sim I_n$, A possède n pivots
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la seule solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique, pour tout $\mathbf{b}$
- ▶ **les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$**
- ▶ $\text{rg}(A) = n$, $\dim \text{Ker}(A) = 0$

Un dernier ajout au cours 8.

[Retour aux données](#)

Un tableau de mesures

n individus, p variables mesurées.

Un tableau de mesures

n individus, p variables mesurées.

Question : ces p variables apportent-elles p informations ?

Un tableau de mesures

n individus, p variables mesurées.

Question : ces p variables apportent-elles p informations ?

$\text{rg}(X) < p \implies$ au moins une variable est combinaison des autres

Une redondance classique

Composition d'un échantillon en pourcentages :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 100$$

Une redondance classique

Composition d'un échantillon en pourcentages :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 100$$

La dernière variable se déduit des autres.

L'information utile

Le rang mesure le nombre de **directions réellement occupées** par les données.

Une redondance classique

Composition d'un échantillon en pourcentages :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 100$$

La dernière variable se déduit des autres.

Conséquence p colonnes, mais un rang au plus égal à $p - 1$. Une dimension **illusoire**.

L'information utile

Le rang mesure le nombre de **directions réellement occupées** par les données.

500 000 colonnes de SNP, un rang au plus égal à 3 000.

Le rang mesure le nombre de **directions réellement occupées** par les données.

500 000 colonnes de SNP, un rang au plus égal à 3 000.

Vers l'ACP Réduire, ce sera trouver les **quelques directions** qui portent l'essentiel — et changer de base pour s'y placer.

Notion	Définition	Calcul
Base	libre et génératrice	n pivots dans $\mathbb{R}^n$
Coordonnées $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$	l'unique écriture dans $\mathcal{B}$	résoudre $B\alpha = \mathbf{x}$
Dimension	cardinal commun des bases	—
Rang	$\dim \operatorname{Im}(A)$	nombre de pivots
Théorème du rang	$\dim \operatorname{Ker} + \operatorname{rg} = n$	libres + liées = n