

Espaces vectoriels et sous-espaces

Cours 4 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

Une stabilité remarquable

Solutions d'un système homogène

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{S}_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

Solutions d'un système homogène

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{S}_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

Trois observations, valables **quel que soit** A .

Le vecteur nul appartient

Stabilité par somme

$A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, toujours.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ solutions. Alors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ aussi.

$$\mathbf{0} \in \mathcal{S}_0$$

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Stabilité par multiple

Une structure à nommer

$\mathbf{u}$ solution, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\mathbf{u}$ aussi.

Contenir $\mathbf{0}$, rester stable par somme et par multiple.

$$A(\lambda\mathbf{u}) = \lambda A\mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Une structure à nommer

Contenir **0**, rester stable par somme et par multiple.

Cette même propriété, ailleurs : droites et plans par l'origine, espaces engendrés, colonnes d'une matrice.

Une structure à nommer

Contenir **0**, rester stable par somme et par multiple.

Cette même propriété, ailleurs : droites et plans par l'origine, espaces engendrés, colonnes d'une matrice.

Démarche Une propriété qui revient partout mérite un **nom** et une **théorie**.

Définition

Sous-espace vectoriel

$F \subset \mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** si :

Définition

Critère condensé

$F \subset \mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** si :

Les deux stabilités en une seule vérification :

$$\mathbf{0} \in F, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in F, \lambda \mathbf{u} \in F$$

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F, \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in F$$

Critère condensé

Premiers exemples

Les deux stabilités en une seule vérification :

$\{\mathbf{0}\}$ — le plus petit.

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in F, \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in F$$

$\mathbb{R}^n$ — le plus grand.

Un sous-espace est **stable par combinaison linéaire**.

Premiers exemples

$\{0\}$ — le plus petit.

$\mathbb{R}^n$ — le plus grand.

Toute droite passant par l'origine.

Tout plan passant par l'origine.

Une droite par l'origine

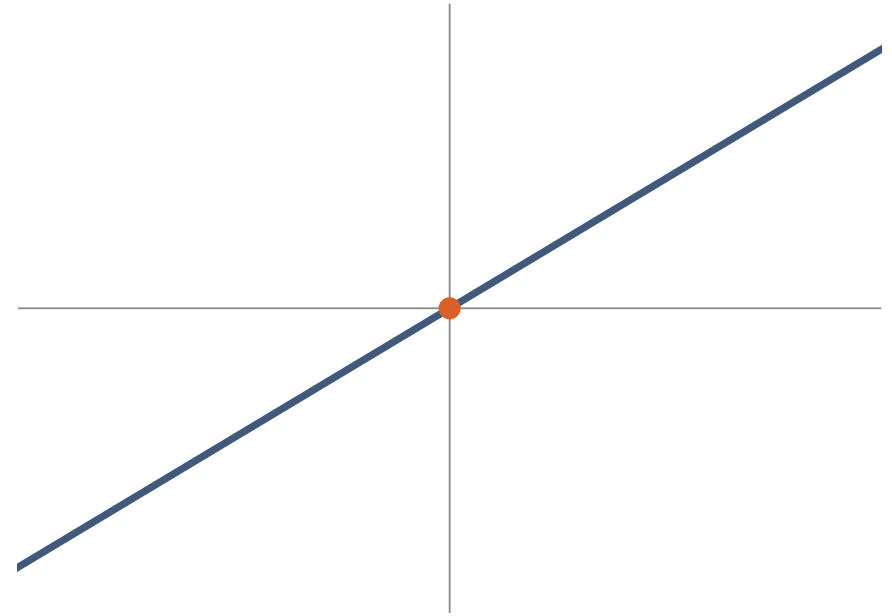


Figure 1

Une droite qui évite l'origine

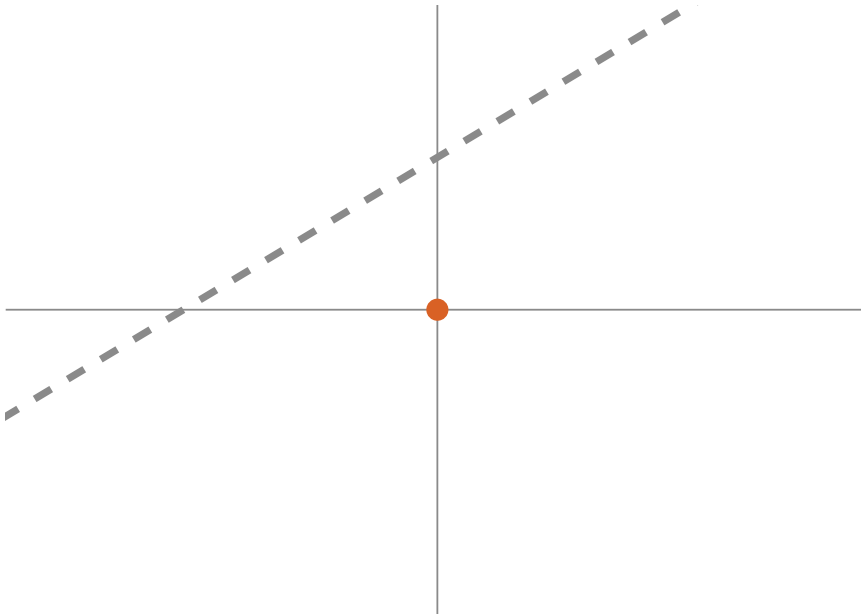


Figure 2

Le test le plus rapide

Réflexe $0 \notin F$ suffit à conclure : F n'est **pas** un sous-espace.

Le test le plus rapide

Contre-exemples

Réflexe $\mathbf{0} \notin F$ suffit à conclure : F n'est **pas** un sous-espace.

Aucune autre vérification nécessaire.

Le premier quadrant $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

$$\mathbf{u} = (1, 1) \in F, \quad (-1)\mathbf{u} = (-1, -1) \notin F$$

Contre-exemples

Retour au point de départ

Le premier quadrant $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

$$\mathbf{u} = (1, 1) \in F, \quad (-1)\mathbf{u} = (-1, -1) \notin F$$

Le cercle unité, la réunion de deux droites distinctes.

Premier résultat L'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$.

Retour au point de départ

Et pour $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Premier résultat L'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$.

Son nom : le **noyau** de A .

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$: $\mathbf{0}$ n'est pas solution.

Et pour $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$: $\mathbf{0}$ n'est pas solution.

Jamais un sous-espace.

Et pour $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$: $\mathbf{0}$ n'est pas solution.

Jamais un sous-espace.

Une droite ou un plan **translaté** — la description paramétrique du cours 2.

Définition

Espace engendré

Toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$.

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \}$$

Définition

Toujours un sous-espace

Toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$.

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \}$$

Notation également rencontrée : $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \rangle$.

Somme de deux combinaisons : une combinaison.

Multiple d'une combinaison : une combinaison.

Toujours un sous-espace

Somme de deux combinaisons : une combinaison.

Multiple d'une combinaison : une combinaison.

Propriété $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ est le **plus petit** sous-espace contenant $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$.

Un seul vecteur

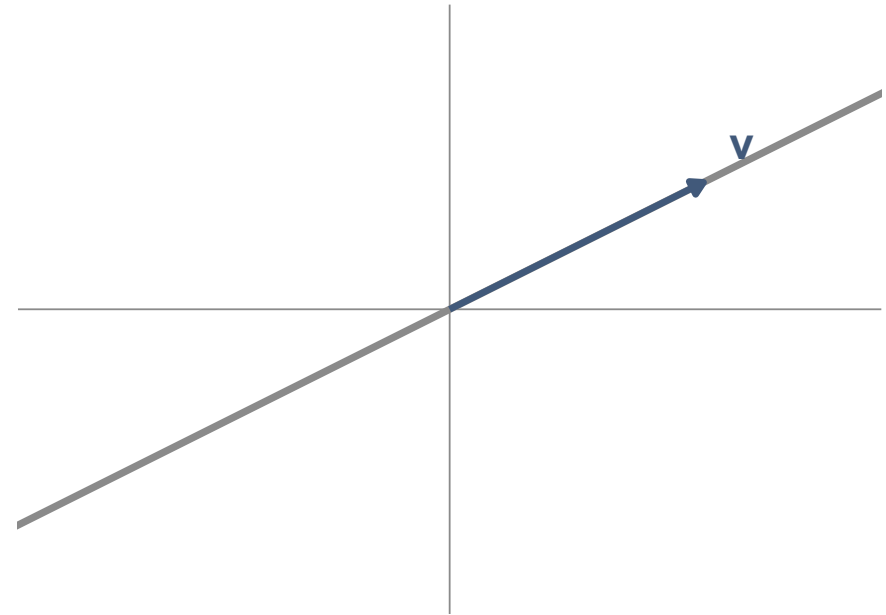


Figure 3

Deux vecteurs du plan

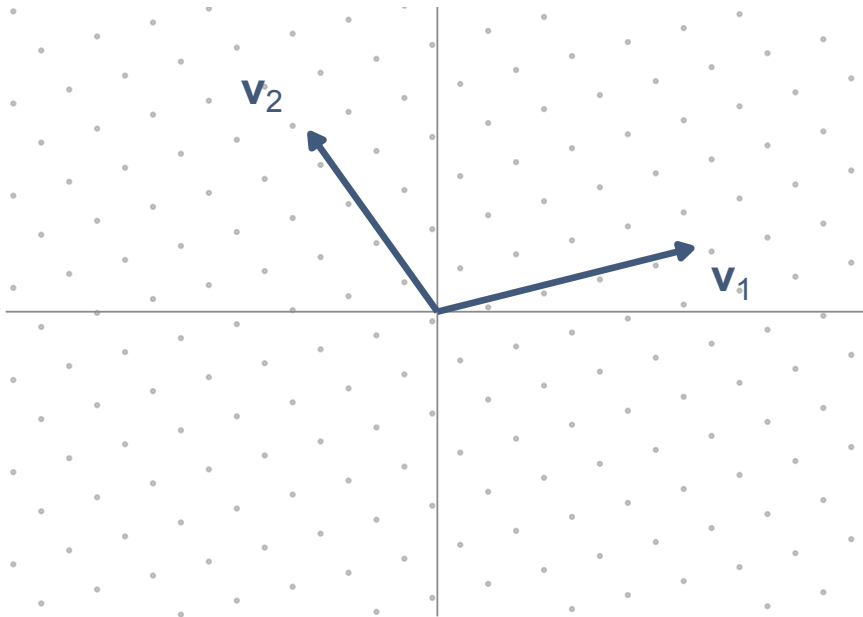


Figure 4

Deux vecteurs colinéaires

$$\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 :$$

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1)$$

Deux vecteurs colinéaires

$\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 :$

$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1)$

Une droite, pas un plan. Le second vecteur n'apporte rien.

Les colonnes d'une matrice

Vect des colonnes de A : l'**image** de A .

$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$

Reformulation du cours 3 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ compatible $\iff \mathbf{b} \in \text{Im}(A)$.

Les colonnes d'une matrice

Vect des colonnes de A : l'**image** de A .

$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$

Deux sous-espaces pour une matrice

	Vit dans	Décrit
Noyau $\text{Ker}(A)$	$\mathbb{R}^n$	les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Image $\text{Im}(A)$	$\mathbb{R}^m$	les $\mathbf{b}$ atteignables

Deux sous-espaces pour une matrice

	Vit dans	Décrit
Noyau $\text{Ker}(A)$	$\mathbb{R}^n$	les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Image $\text{Im}(A)$	$\mathbb{R}^m$	les $\mathbf{b}$ atteignables

Unicité d'un côté, existence de l'autre.

Familles génératrices

Définition

$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ **engendre** F si tout vecteur de F est une combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$.

$$F = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$$

Exemple canonique

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple canonique

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Famille génératrice de $\mathbb{R}^3$: tout $\mathbf{x}$ vaut $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Une question pratique

$$\mathbf{b} \in \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) ?$$

Traduction Une question d'appartenance devient un **système linéaire**. Le pivot de Gauss répond.

Une question pratique

$$\mathbf{b} \in \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) ?$$

Ajouter sans rien gagner

Une famille génératrice reste génératrice après ajout d'un vecteur.

Une famille génératrice reste génératrice après ajout d'un vecteur.

Une famille génératrice reste génératrice après ajout d'un vecteur.

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}) \iff \mathbf{w} \in \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$$

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}) \iff \mathbf{w} \in \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$$

D'où la question inverse : quels vecteurs sont **superflus** ?

Définition

Indépendance linéaire

$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale.

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

Définition

$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale.

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

Sinon : famille **liée**.

Deux emplois du mot « libre »

Variable libre — cours 2. Une inconnue dont la colonne ne porte pas de pivot.

Famille libre — ici. Des vecteurs dont aucun n'est superflu.

Deux emplois du mot « libre »

Variable libre — cours 2. Une inconnue dont la colonne ne porte pas de pivot.

Famille libre — ici. Des vecteurs dont aucun n'est superflu.

Homonymie assumée Deux notions **sans rapport**, un même adjectif.
L'usage est établi ; la vigilance s'impose.

Le lien, malgré tout

Colonnes de A liées $\iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une solution non triviale.

Le lien, malgré tout

Colonnes de A liées $\iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une solution non triviale.

$\iff$ le système possède au moins une **variable libre**.

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \text{ liée} \iff \text{Ker}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$$

Méthode

Liberté d'une famille : un système homogène à résoudre.

Le lien, malgré tout

Colonnes de A liées $\iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une solution non triviale.

$\iff$ le système possède au moins une **variable libre**.

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \text{ liée} \iff \text{Ker}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$$

Les deux mots se rencontrent dans la même phrase, sans se confondre.

Méthode

Liberté d'une famille : un système homogène à résoudre.

Critère par le pivot Famille **libre** $\iff$ autant de pivots que de vecteurs.

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \text{ libre} \iff r = p$$

Un vecteur

$(\mathbf{v})$ libre $\iff \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

$$\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \implies \alpha = 0$$

Deux vecteurs

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ liée $\iff$ colinéaires.

Deux vecteurs

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ liée $\iff$ colinéaires.

Attention Au-delà de deux vecteurs, la colinéarité **deux à deux** ne suffit plus. Trois vecteurs peuvent être liés sans qu'aucune paire ne le soit.

Familles nécessairement liées

Une famille contenant $\mathbf{0}$.

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

Familles nécessairement liées

Pourquoi

Une famille contenant $\mathbf{0}$.

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

Une famille de plus de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$p > n \implies (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \text{ liée}$$

p vecteurs de $\mathbb{R}^n$: un système homogène à n équations et p inconnues.

Pourquoi

p vecteurs de $\mathbb{R}^n$: un système homogène à n équations et p inconnues.

$p > n$: au plus n pivots, donc au moins une variable libre.

Pourquoi

p vecteurs de $\mathbb{R}^n$: un système homogène à n équations et p inconnues.

$p > n$: au plus n pivots, donc au moins une variable libre.

Une solution non triviale existe.

Reformulation

Vecteur superflu Famille liée $\iff$ **au moins un vecteur** est combinaison linéaire des autres.

Reformulation

Vecteur superflu Famille liée $\iff$ **au moins un vecteur** est combinaison linéaire des autres.

Le retirer ne change pas l'espace engendré.

Deux exigences opposées

Trop peu, trop

Génératrice — assez de vecteurs pour atteindre tout F .

Libre — pas de vecteur superflu.

Trop peu, trop

Génératrice — assez de vecteurs pour atteindre tout F .

Libre — pas de vecteur superflu.

génératrice : $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = F$ libre : aucun $\mathbf{v}_i$ redondant

Deux réglages

Ajouter un vecteur : aide à engendrer, menace la liberté.

Deux réglages

Ajouter un vecteur : aide à engendrer, menace la liberté.

Retirer un vecteur : préserve la liberté, menace la génération.

Deux réglages

Ajouter un vecteur : aide à engendrer, menace la liberté.

Retirer un vecteur : préserve la liberté, menace la génération.

Le point d'équilibre Une famille **à la fois libre et génératrice** : ni trop, ni trop peu.

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Libre ? $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$: famille **liée**.

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Libre ? $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$: famille **liée**.

Génératrice de $\mathbb{R}^3$? $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$: un **plan**.

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Libre ? $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$: famille **liée**.

Génératrice de $\mathbb{R}^3$? $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$: un **plan**.

Deux pivots pour trois vecteurs, dans $\mathbb{R}^3$: ni libre, ni génératrice.

Le même exemple, deux appartenances

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{ (a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Le même exemple, deux appartenances

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{ (a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Vect}$$

Le même exemple, deux appartenances

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{ (a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Vect}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a = 1, b = 1 \implies a + b = 2 \neq 1 \implies \notin \text{Vect}$$

Le même exemple, deux appartenances

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{ (a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Vect}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a = 1, b = 1 \implies a + b = 2 \neq 1 \implies \notin \text{Vect}$$

Une troisième coordonnée imposée par les deux premières :
l'équation du plan.

Récapitulatif

Notion	Définition	Système	Verdict par le pivot
Sous-espace F	stable par combinaison	—	$\mathbf{0} \notin F$: non
$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$	toutes les combinaisons	—	toujours un sous-espace
b atteignable ?	$\mathbf{b} \in \text{Vect}$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	système compatible
Génératrice de $\mathbb{R}^m$	$\text{Vect} = \mathbb{R}^m$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tout $\mathbf{b}$	un pivot par ligne : $r = m$
Libre	seule combinaison nulle triviale	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	un pivot par colonne : $r = p$

Récapitulatif

Notion	Définition	Système	Verdict par le pivot
Sous-espace F	stable par combinaison	—	$\mathbf{0} \notin F$: non
$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$	toutes les combinaisons	—	toujours un sous-espace
b atteignable ?	$\mathbf{b} \in \text{Vect}$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	système compatible
Génératrice de $\mathbb{R}^m$	$\text{Vect} = \mathbb{R}^m$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tout $\mathbf{b}$	un pivot par ligne : $r = m$
Libre	seule combinaison nulle triviale	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	un pivot par colonne : $r = p$

Une symétrie Engendrer se lit sur les **lignes**, être libre sur les **colonnes**. Le même calcul répond aux deux.