

Calcul matriciel et matrice inverse

Cours 3 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

L'objet matrice

Objet mathématique

Un système : un tableau de coefficients, un second membre.

Objet mathématique

Un système : un tableau de coefficients, un second membre.
Jusqu'ici, un support de calcul.

Objet mathématique

Un système : un tableau de coefficients, un second membre.

Jusqu'ici, un support de calcul.

Changement de statut Ce tableau devient un **objet mathématique**, avec ses propres opérations.

Matrice

Un tableau rectangulaire de réels, à m lignes et n colonnes.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Matrice

Un tableau rectangulaire de réels, à m lignes et n colonnes.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

a_{ij} : ligne i , colonne j . **Toujours dans cet ordre.**

Vocabulaire

Carrée — $m = n$.

Vecteur colonne — $n = 1$. **Vecteur ligne** — $m = 1$.

Carrée — $m = n$.

Vecteur colonne — $n = 1$. **Vecteur ligne** — $m = 1$.

Diagonale — carrée, $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$.

Identité I_n — diagonale, tous les termes diagonaux à 1.

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Coordonnée par coordonnée, comme pour les vecteurs.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Somme et multiple

Coordonnée par coordonnée, comme pour les vecteurs.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Somme définie **seulement** entre matrices de mêmes dimensions.

Le produit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 1,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 1,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Combinaison des colonnes

Combinaison des colonnes $A\mathbf{x}$: la **combinaison linéaire des colonnes de A** , pondérée par les coefficients de $\mathbf{x}$.

$$A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_j = j\text{-ième colonne de } A$$

Interprétation géométrique

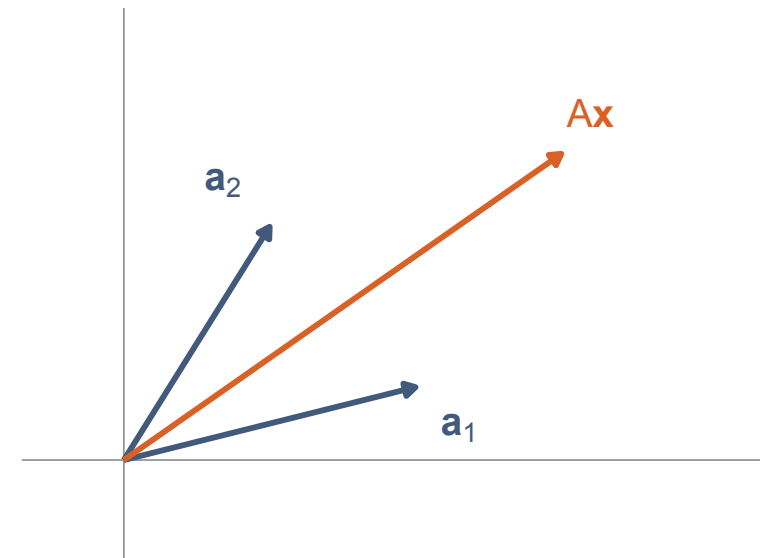


Figure 1

Les colonnes de C1, revisitées. Ici $\mathbf{x} = (1, 1)$.

Lecture par les lignes

Coefficient i de $A\mathbf{x}$: la ligne i de A , « appliquée » à $\mathbf{x}$.

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Produit de deux matrices

AB : chaque colonne de B , transformée par A .

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_p]$$

Lecture par les lignes

Coefficient i de $A\mathbf{x}$: la ligne i de A , « appliquée » à $\mathbf{x}$.

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Utile pour **calculer**. La lecture par colonnes, pour **comprendre**.

Produit de deux matrices

AB : chaque colonne de B , transformée par A .

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_p]$$

Une définition, p produits matrice-vecteur.

Formule du produit

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Formule du produit

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ligne i de A , colonne j de B .

Compatibilité des dimensions

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{AB}$$

Compatibilité des dimensions

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{AB}$$

Condition Le nombre de **colonnes** de A égale le nombre de **lignes** de B .

Compatibilité des dimensions

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{AB}$$

Condition Le nombre de **colonnes** de A égale le nombre de **lignes** de B .

Sinon : produit non défini.

Calcul de AB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de AB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Permutation des facteurs

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Permutation des facteurs

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Non-commutativité $AB \neq BA$ en général. Le produit matriciel n'est **pas commutatif**.

Produit nul et simplification

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un produit nul, sans facteur nul.
Et $AB = AC$ avec $B \neq C$: possible. **Aucune simplification.**

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0, \quad AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

Produit nul et simplification

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un produit nul, sans facteur nul.

Propriétés conservées

Propriété	
Associativité	$A(BC) = (AB)C$
Distributivité	$A(B + C) = AB + AC$
Scalars	$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
Élément neutre	$I_m A = A I_n = A$

Propriétés conservées

Propriété	
Associativité	$A(BC) = (AB)C$
Distributivité	$A(B + C) = AB + AC$
Scalars	$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
Élément neutre	$I_m A = A I_n = A$

Trois écritures

Tout, sauf la commutativité et la simplification.

Écriture développée

Équation vectorielle

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Équation vectorielle

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Une combinaison linéaire des colonnes.

Équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Le même problème Trois écritures, un seul objet. Le choix relève de la commodité.

Critère de compatibilité

Compatibilité $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ compatible $\iff \mathbf{b}$ est **combinaison linéaire des colonnes** de A .

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \mathbf{b} \in \{ x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

Critère de compatibilité

Le système homogène

Compatibilité $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ compatible $\iff \mathbf{b}$ est **combinaison linéaire des colonnes** de A .

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \mathbf{b} \in \{x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

L'existence devient une question d'**appartenance**.

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: toujours compatible.

Le système homogène

Le système homogène

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: toujours compatible.

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ convient — la solution **triviale**.

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: toujours compatible.

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ convient — la solution **triviale**.

La vraie question : en existe-t-il d'**autres** ?

$$\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \text{au moins une variable libre}$$

Transposition

Transposée

$$(A^\top)_{ij} = a_{ji}, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n} \implies A^\top \in \mathcal{M}_{n,m}$$

Transposition

Règles de la transposition

$$(A^\top)_{ij} = a_{ji}, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n} \implies A^\top \in \mathcal{M}_{n,m}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A^\top)^\top = A, \quad (A + B)^\top = A^\top + B^\top, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top$$

Règles de la transposition

$$(A^\top)^\top = A, \quad (A + B)^\top = A^\top + B^\top, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top$$

L'ordre s'inverse dans le produit. Une source d'erreurs constante.

Matrice symétrique

$A^\top = A$. Nécessairement carrée.

Matrice symétrique

$A^\top = A$. Nécessairement carrée.

À retenir pour plus tard Les matrices de covariance et de corrélation sont **symétriques**. Tout le cours 9 repose sur cette propriété.

Matrice inverse

Matrice inversible

A carrée est **inversible** s'il existe B carrée telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Cas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

A carrée est **inversible** s'il existe B carrée telle que :

$$AB = BA = I_n$$

B est alors **unique**, notée A^{-1} .

Cas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Critère A inversible $\iff ad - bc \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Critère A inversible $\iff ad - bc \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$: le **déterminant**. Cours 8.

Exemple numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = -2$$

Exemple numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Matrice non inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 0$$

Matrice non inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 0$$

Deuxième colonne : le double de la première.

Matrice non inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 0$$

Deuxième colonne : le double de la première.

Les colonnes ne « remplissent » pas le plan.

Règles de l'inversion

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$$

Règles de l'inversion

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$$

Là encore, l'ordre s'inverse dans le produit.

Résolution par l'inverse

A inversible : solution unique.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Résolution par l'inverse

A inversible : solution unique.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Élégant sur le papier.

Jamais en pratique Calculer A^{-1} puis multiplier coûte **trois fois plus cher** qu'un pivot de Gauss, et amplifie les erreurs d'arrondi.

Résolution par l'inverse

A inversible : solution unique.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Élégant sur le papier.

Jamais en pratique Calculer A^{-1} puis multiplier coûte **trois fois plus cher** qu'un pivot de Gauss, et amplifie les erreurs d'arrondi.

L'inverse est un outil de **raisonnement**, pas de calcul.

Matrices élémentaires

Opération élémentaire et matrice

Construction de E

Chaque opération élémentaire sur les lignes de A :
une multiplication **à gauche** par une matrice E .

$$A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} EA$$

La même opération, appliquée à l'identité.

Construction de E

Inverse d'une élémentaire

La même opération, appliquée à l'identité.

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \implies E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque opération élémentaire est réversible.

Inverse d'une élémentaire

Chaque opération élémentaire est réversible.

E^{-1} existe, et correspond à l'opération inverse

Inverse d'une élémentaire

Chaque opération élémentaire est réversible.

E^{-1} existe, et correspond à l'opération inverse

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \implies E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Critère d'inversibilité

Inversibilité A carrée est inversible $\iff$ sa forme échelonnée réduite est I_n .

$$A \sim I_n : E_k \cdots E_1 A = I_n \implies A^{-1} = E_k \cdots E_1$$

Critère d'inversibilité

Inversibilité A carrée est inversible $\iff$ sa forme échelonnée réduite est I_n .

$$A \sim I_n : E_k \cdots E_1 A = I_n \implies A^{-1} = E_k \cdots E_1$$

L'inverse : le **produit des opérations** qui mènent à I_n .

Le pivot de Gauss appliqué à $[A \mid I_n]$.

$$[A \mid I_n] \sim \dots \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

Le pivot de Gauss appliqué à $[A \mid I_n]$.

$$[A \mid I_n] \sim \dots \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

Les opérations qui transforment A en I_n transforment I_n en A^{-1} .

Exemple — départ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemple — première élimination

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemple — seconde élimination

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemple — lecture

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple — lecture

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification par $AA^{-1} = I_3$: indispensable.

Échec de l'algorithme

Une ligne de zéros à gauche, avant d'atteindre I_n .

Une ligne de zéros à gauche, avant d'atteindre I_n .

Verdict immédiat Moins de n pivots : A **n'est pas inversible**.

Aucun calcul supplémentaire.

Pour A carrée d'ordre n , équivalences :

- ▶ A est inversible
- ▶ $A \sim I_n$
- ▶ A possède n pivots
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la seule solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique, pour tout $\mathbf{b}$

Récapitulatif

Pour A carrée d'ordre n , équivalences :

- ▶ A est inversible
- ▶ $A \sim I_n$
- ▶ A possède n pivots
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la seule solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique, pour tout $\mathbf{b}$

Cette liste s'allongera jusqu'au cours 8.