

Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Cours 2 — Algèbre linéaire et analyse de données

Christophe Ambroise

L3 GBI — Université d'Évry

Le problème

Préparer un milieu de culture

Trois solutions mères, trois composants.

g/L	Glucose	Azote	Phosphate
S	20	5	1
S	10	20	2
S	0	0	10
Cible	30	25	13

Préparer un milieu de culture

Trois solutions mères, trois composants.

g/L	Glucose	Azote	Phosphate
S	20	5	1
S	10	20	2
S	0	0	10
Cible	30	25	13

Quels volumes x_1, x_2, x_3 ?

Mise en équations

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 &= 30 \\ 5x_1 + 20x_2 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13 \end{cases}$$

Mise en équations

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 &= 30 \\ 5x_1 + 20x_2 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13 \end{cases}$$

Trois équations, trois inconnues.

Le même problème, partout

Doser un mélange. Équilibrer une réaction.

Ajuster un modèle. Estimer des flux métaboliques.

Le même problème, partout

Doser un mélange. Équilibrer une réaction.

Ajuster un modèle. Estimer des flux métaboliques.

Le plus ancien problème Résolution de systèmes linéaires : Chine,
200 av. J.-C.

Équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Les a_i : les **coefficients**. Le nombre b : le **second membre**.

Les x_i : les **inconnues**.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \quad a_j, b \in \mathbb{R} \text{ connus}$$

Linéaire ?

Oui

$$3x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 = 2(\sqrt{6} - x_2) + x_3$$

$$\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0$$

Non

$$x_1x_2 = 4$$

$$\sqrt{x_1} - 2x_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2 = 3$$

Linéaire ?

Oui

$$3x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 = 2(\sqrt{6} - x_2) + x_3$$

$$\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0$$

Non

$$x_1x_2 = 4$$

$$\sqrt{x_1} - 2x_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2 = 3$$

Chaque inconnue : **puissance 1**, jamais multipliée par une autre.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad x_j \text{ au degré } 1$$

Attention

$\sqrt{6}$ et π : des **coefficients**, pas des inconnues.

Système linéaire

m équations, n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Attention

$\sqrt{6}$ et π : des **coefficients**, pas des inconnues.

La linéarité concerne les x_i , pas les nombres qui les accompagnent.

Système linéaire

m équations, n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Double indice : a_{ij} — ligne i , colonne j .

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

Solution

Un n -uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifiant **toutes** les équations à la fois.

Solution

Un n -uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifiant **toutes** les équations à la fois.

L'**ensemble des solutions** : toutes ces listes, et rien d'autre.

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \right. \right\}$$

Solution

Un n -uplet $(s_1, \dots, s_n)$ vérifiant **toutes** les équations à la fois.

L'**ensemble des solutions** : toutes ces listes, et rien d'autre.

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \right. \right\}$$

Résoudre Décrire l'ensemble des solutions. Pas en trouver une.

Deux questions

Existence — au moins une solution ?

Unicité — au plus une solution ?

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \quad \text{card } \mathcal{S} \leq 1$$

Deux questions

Existence — au moins une solution ?

Unicité — au plus une solution ?

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \quad \text{card } \mathcal{S} \leq 1$$

Les réponses, avant tout calcul, par la géométrie.

Lecture géométrique

Une équation, deux inconnues

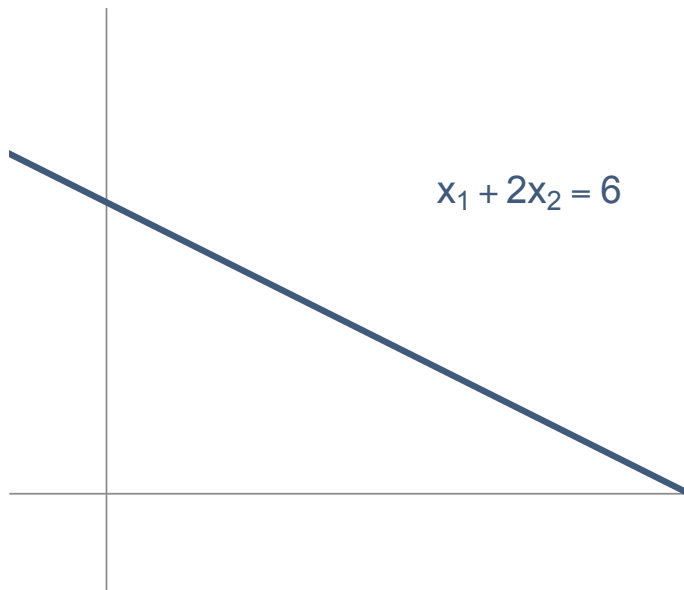


Figure 1

Deux équations

Deux droites.

Deux équations

Deux droites.

Les solutions communes : les points d'**intersection**.

Cas 1 — sécantes

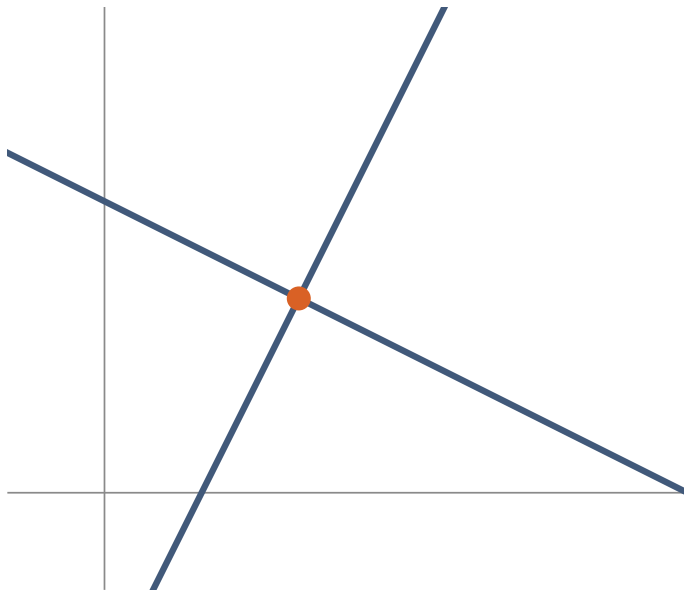


Figure 2

Deux équations

Deux droites.

Les solutions communes : les points d'**intersection**.

Trois configurations, pas une de plus.

$$\mathcal{S} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$$

Cas 2 — parallèles

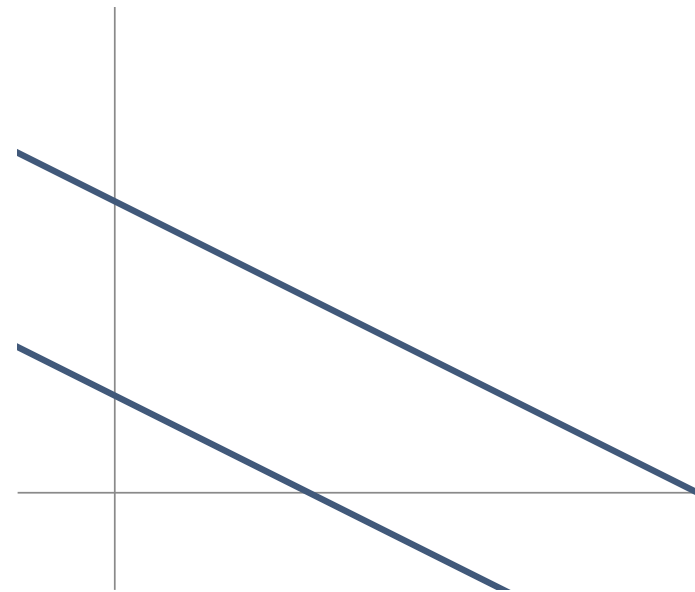


Figure 3

Cas 3 — confondues

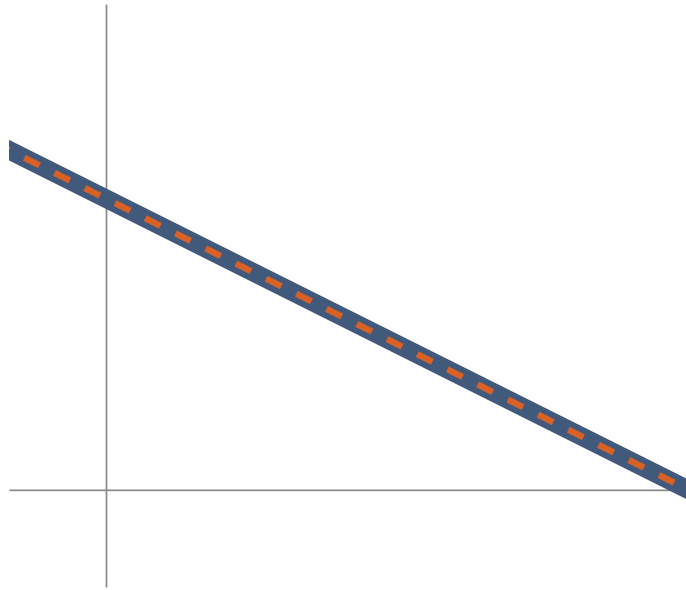


Figure 4

Le résultat

Trois cas, jamais plus Un système linéaire admet **zéro**, **une**, ou **une infinité** de solutions.

Jamais exactement deux. Jamais exactement dix-sept.

$$\text{card } \mathcal{S} \in \{0, 1, +\infty\}$$

Le résultat

Trois cas, jamais plus Un système linéaire admet **zéro**, **une**, ou **une infinité** de solutions.

Pourquoi jamais deux

Deux solutions distinctes **u** et **v**.

Pourquoi jamais deux

Deux solutions distinctes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Alors tous les points de la droite $(\mathbf{u}\mathbf{v})$: encore des solutions.

Pourquoi jamais deux

Deux solutions distinctes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Alors tous les points de la droite $(\mathbf{u}\mathbf{v})$: encore des solutions.

Deux entraîne l'infini.

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \implies \forall t \in \mathbb{R}, (1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v} \in \mathcal{S}$$

Vocabulaire

Compatible — au moins une solution.

Incompatible — aucune solution.

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \qquad \mathcal{S} = \emptyset$$

Trois inconnues

Une équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$: un **plan** de l'espace.

Une équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$: un **plan** de l'espace.

Configuration	Solutions
Trois plans sécants en un point	une
Trois plans se coupant selon une droite	une infinité
Deux plans parallèles	aucune
Trois plans confondus	une infinité

$n = 500\,000$: plus aucune image.

$n = 500\,000$: plus aucune image.

D'où l'algèbre L'intuition géométrique s'arrête à 3. Le calcul, non.

L'idée

Transformer le système en un système **plus simple**,
sans changer l'ensemble des solutions.

Définition

Deux systèmes **équivalents** : même ensemble de solutions.

Définition

Deux systèmes **équivalents** : même ensemble de solutions.

Notation : $\sim$

$$S \sim S' \iff \mathcal{S} = \mathcal{S}'$$

Trois opérations élémentaires

Échange — permuter deux lignes. $L_i \leftrightarrow L_j$

Trois opérations élémentaires

Échange — permuter deux lignes. $L_i \leftrightarrow L_j$

Dilatation — multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$. $L_i \leftarrow \lambda L_i$

La condition qui compte

$\lambda \neq 0$ dans la dilatation.

Trois opérations élémentaires

Échange — permuter deux lignes. $L_i \leftrightarrow L_j$

Dilatation — multiplier une ligne par $\lambda \neq 0$. $L_i \leftarrow \lambda L_i$

Transvection — ajouter à une ligne un multiple d'une autre.
 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

La condition qui compte

$\lambda \neq 0$ dans la dilatation.

Multiplier une ligne par 0 : l'équation disparaît, des solutions apparaissent.

Pourquoi ça marche

Chaque opération est **réversible**.

Opération	Inverse
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

Pourquoi ça marche

Chaque opération est **réversible**.

Opération	Inverse
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

Aucune solution perdue, aucune inventée.

$$S \xrightarrow{O} S' \text{ avec } O \text{ inversible} \implies \mathcal{S} = \mathcal{S}'$$

Exemple — départ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Exemple — éliminer x_1

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases}$$

Exemple — normaliser

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases}$$

Exemple — remonter

$$x_3 = -1, \text{ puis } x_2 = 4 + 4x_3 = 0, \text{ puis } x_1 = 2x_2 - x_3 = 1.$$

Exemple — éliminer x_2

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 30x_3 = -30 \end{cases}$$

Exemple — remonter

$$x_3 = -1, \text{ puis } x_2 = 4 + 4x_3 = 0, \text{ puis } x_1 = 2x_2 - x_3 = 1.$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$$

$x_3 = -1$, puis $x_2 = 4 + 4x_3 = 0$, puis $x_1 = 2x_2 - x_3 = 1$.

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$$

Vérification dans les trois équations d'origine : indispensable.

Les x_i recopiés à chaque ligne, à chaque étape.

Le poids de la notation

Les x_i recopiés à chaque ligne, à chaque étape.

Seuls les **coefficients** changent.

Matrices augmentées

Ne garder que les nombres

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Deux matrices

Matrice des coefficients — 3×3 , à gauche de la barre.

Matrice augmentée — 3×4 , barre comprise.

Ne garder que les nombres

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right]$$

Deux matrices

Matrice des coefficients — 3×3 , à gauche de la barre.

Matrice augmentée — 3×4 , barre comprise.

La barre : un rappel visuel, sans statut mathématique.

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad [A \mid \mathbf{b}] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Les places vides

Un coefficient absent : un **zéro**.

Les places vides

Un coefficient absent : un **zéro**.

$5x_1 - 5x_3 = 10$ donne la ligne $[5 \ 0 \ -5 \ 10]$.

Opérations sur les lignes

Les trois opérations élémentaires, transposées telles quelles.

Opérations sur les lignes

Les trois opérations élémentaires, transposées telles quelles.

Vocabulaire identique, notation identique, effet identique.

Objectif

Formes échelonnées

Une forme où les solutions **se lisent**.

Matrice échelonnée

Trois conditions :

Matrice échelonnée

Trois conditions :

1. Lignes nulles en **bas**.

Matrice échelonnée

Trois conditions :

1. Lignes nulles en **bas**.
2. Dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul est à **droite** de celui de la ligne au-dessus.

Pivot

Le premier coefficient non nul d'une ligne : son **pivot**.

Matrice échelonnée

Trois conditions :

1. Lignes nulles en **bas**.
2. Dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul est à **droite** de celui de la ligne au-dessus.
3. En dessous d'un tel coefficient : que des zéros.

$j(i)$: colonne du pivot de la ligne i , pour $i \leq r$.

$$j(1) < j(2) < \dots < j(r), \quad \text{lignes } r+1, \dots, m \text{ nulles}$$

Pivot

Le premier coefficient non nul d'une ligne : son **pivot**.

Colonne contenant un pivot : **colonne pivot**.

Échelonnée

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Trois pivots. L'escalier descend vers la droite.

Pas échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ligne nulle au milieu.

Pas échelonnée non plus

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un 3 sous un pivot.

Échelonnée réduite

Deux conditions de plus :

Échelonnée réduite

Deux conditions de plus :

4. Chaque pivot vaut 1.

Échelonnée réduite

Deux conditions de plus :

4. Chaque pivot vaut 1.
5. Un pivot est **seul non nul** dans sa colonne.

$$\forall i \leq r, \quad a_{i, j(i)} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \neq i, \quad a_{k, j(i)} = 0$$

Comparaison

Échelonnée

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Échelonnée réduite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un résultat important

Unicité Une matrice est équivalente à **une seule** matrice échelonnée réduite.

Un résultat important

Unicité Une matrice est équivalente à **une seule** matrice échelonnée réduite.

La forme échelonnée, elle, dépend du chemin suivi.

Un résultat important

Unicité Une matrice est équivalente à **une seule** matrice échelonnée réduite.

La forme échelonnée, elle, dépend du chemin suivi.

Conséquence : la **position des pivots** ne dépend pas du chemin.

$$\forall A, \exists! R \text{ échelonnée réduite} : A \sim R$$

Carl Friedrich Gauss

L'algorithme du pivot

Méthode publiée en 1810, pour le calcul d'orbites.

Méthode publiée en 1810, pour le calcul d'orbites.

Connue en Chine dix-huit siècles plus tôt.

Deux phases

Descente — vers la forme échelonnée. Élimination sous les pivots.

Méthode publiée en 1810, pour le calcul d'orbites.

Connue en Chine dix-huit siècles plus tôt.

Aujourd'hui : le cœur de tout logiciel de calcul numérique.

Deux phases

Descente — vers la forme échelonnée. Élimination sous les pivots.

Remontée — vers la forme échelonnée réduite. Élimination au-dessus.

Descente, étape par étape

1. Colonne non nulle la plus à gauche.

Descente, étape par étape

1. Colonne non nulle la plus à gauche.
2. Un coefficient non nul en tête : par échange si nécessaire. C'est le pivot.

Descente, étape par étape

1. Colonne non nulle la plus à gauche.
2. Un coefficient non nul en tête : par échange si nécessaire. C'est le pivot.
3. Élimination de tout ce qui est en dessous, par transvections.

Descente, étape par étape

1. Colonne non nulle la plus à gauche.
2. Un coefficient non nul en tête : par échange si nécessaire. C'est le pivot.
3. Élimination de tout ce qui est en dessous, par transvections.
4. Ligne du pivot mise de côté. Reprise sur ce qui reste.

Remontée

Pivots parcourus **de droite à gauche**.

Remontée

Pivots parcourus **de droite à gauche**.

Chacun ramené à 1 par dilatation.

Remontée

Pivots parcourus **de droite à gauche**.

Chacun ramené à 1 par dilatation.

Élimination au-dessus, par transvections.

Exemple — l'état initial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right]$$

Premier pivot : le 1 en haut à gauche.

Exemple — descente (1)

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array} \right]$$

Colonne 1 terminée.

Exemple — descente (2)

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{array} \right]$$

Forme échelonnée. Trois pivots.

Exemple — remontée (1)

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{30}L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Pivots à 1.

Exemple — remontée (2)

$$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3, \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Colonne 3 nettoyée.

Exemple — remontée (3)

Exemple — lecture

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Forme échelonnée réduite.

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ & x_2 & = & 0 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Exemple — lecture

Choix du pivot

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ & x_2 & = & 0 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Aucun calcul restant. La réponse est écrite.

Un pivot $\neq 0$ suffit en théorie.

Choix du pivot

Un pivot $\neq 0$ suffit en théorie.

En pratique numérique : le **plus grand en valeur absolue**.

Choix du pivot

Un pivot $\neq 0$ suffit en théorie.

En pratique numérique : le **plus grand en valeur absolue**.

Un petit pivot amplifie les erreurs d'arrondi.

Lire les solutions

Deux sortes d'inconnues

Variable liée — inconnue dont la colonne porte un pivot.

Deux sortes d'inconnues

Cas 1 — solution unique

Variable liée — inconnue dont la colonne porte un pivot.

Variable libre — toutes les autres.

$$x_j \text{ liée} \iff j \in \{j(1), \dots, j(r)\}, \quad \text{libres : } n - r$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Trois pivots, trois inconnues. **Aucune variable libre.**

Cas 2 — aucune solution

Cas 2 — aucune solution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right]$$

Dernière ligne : $0 = 5$.

Cas 2 — aucune solution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right]$$

Dernière ligne : $0 = 5$.

Le signal Un pivot dans la **colonne du second membre** : système incompatible.

$$\text{pivot en colonne } n+1 \iff \mathcal{S} = \emptyset$$

Description paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 7x_3 \\ x_2 = 4 + 4x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

Cas 3 — une infinité

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Deux pivots, trois inconnues. x_3 : **libre**.

Description paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 7x_3 \\ x_2 = 4 + 4x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

x_3 parcourt $\mathbb{R}$: une droite de solutions.

Sous forme vectorielle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8+7t \\ 4+4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sous forme vectorielle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8+7t \\ 4+4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de départ, une direction.

Sous forme vectorielle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8+7t \\ 4+4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de départ, une direction.

Déjà une **combinaison linéaire**.

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{p} + t \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Le théorème

Existence et unicité Système **compatible** $\iff$ aucun pivot dans la colonne du second membre.

Solution **unique** $\iff$ compatible et aucune variable libre.

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \text{aucun pivot en colonne } n+1$$

$$\text{card } \mathcal{S} = 1 \iff \mathcal{S} \neq \emptyset \text{ et } r = n$$

Récapitulatif

Pivot dans la dernière colonne	Variables libres	Solutions
oui	—	aucune
non	non	une seule
non	oui	une infinité

Un système à paramètre

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = m \end{cases}$$

Un système à paramètre

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = m \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \quad (m - 1)x_1 = 1 - m$$

Un système à paramètre

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = m \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \quad (m - 1)x_1 = 1 - m$$

$m \neq 1$: solution unique. $m = 1$: une infinité.

$$m \neq 1 \Rightarrow \text{card } \mathcal{S} = 1, \qquad m = 1 \Rightarrow \text{card } \mathcal{S} = +\infty$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 &= 30 \\ 5x_1 + 20x_2 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 &= 30 \\ 5x_1 + 20x_2 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 13 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$$